

(6)

OR

फलन $u = x^2 + y^2 + z^2$ का निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिये। जहाँ $ax + by + cz = p$ दिया गया है।

Find the minimum value of the function $u = x^2 + y^2 + z^2$ where $ax + by + cz = p$ given.

प्रश्न 5. दर्शाओं कि Show that
$$\left| \frac{1}{n} \right| \left| \frac{2}{n} \right| \left| \frac{3}{n} \right| \dots \left| \frac{n-1}{n} \right| = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n^2}, n > 1$$

OR

समाकलन के क्रम को बदलो -

Change the order of Integration-

$$\int_0^{2a} \int_{\frac{x^2}{4a}}^{3a-x} f(x, y) dx dy$$

---X---

Annual Online Examination 2020

B.Sc.-II

MATHEMATICS

Paper - I

ADVANCED CALCULUS

Max. Marks : 50

Min. Marks : 17

Time : 3 Hrs.

टीप : खण्ड 'अ' में दस अतिलघूत्तरी प्रश्न हैं, जिन्हें हल करना अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघूत्तरी प्रश्न एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरी प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल करें।

Note : Section 'A', containing 10 very short-answer-type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short-answer-type questions and Section 'C' consists of long-answer-type questions. Section 'A' has to be solved first.

Section - 'A'

निम्नांकित अतिलघूत्तरी प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्यों में दें।
Answer the following very short-answer-type questions in one or two sentences. (1x10=10)

प्रश्न 1. अनुक्रम $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ (a) अभिसारी (b) अपसारी है।

Sequence $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ is (a) convergent (b) divergent.

प्रश्न 2. अनुक्रम $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$ (a) अभिसारी (b) अपसारी है।

Sequence $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$ is (a) convergent (b) divergent.

(2)

प्रश्न 3. $f(x) = \sin^2 x$ के सभी परिमित मानों के लिये (a) सतत (b) असतत है।
 $f(x) = \sin^2 x$ is (a) continuous (b) not continuous for all finite values of x .

$$\text{प्रश्न 4. } f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x = 0 \end{cases}$$

तो $x=0$ पर $f(x)$ (a) अवकलनीय है (b) अवकलनीय नहीं है।
Then $f(x)$ is (a) differentiable (b) not differentiable at $x=0$.

प्रश्न 5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$
का (a) अस्तित्व है (b) अस्तित्व नहीं है।
(a) Exists (b) Does not exist.

प्रश्न 6. यदि $u = x^2 + y^2 + z^2$
तो then $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = \dots$

प्रश्न 7. $y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ का एनवेलोप- - - होगा। जहाँ 'm' एक प्राचल है।

$y = mx + \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$ has the envelope - - - where 'm' is the parameter.
प्रश्न 8. दो स्वतंत्र चर (x, y) के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मानों के लिये लेगरांजे का प्रतिबन्ध लिखिये।

Write the Langranges condition for maxima or minima of two independent variables (x, y) .

प्रश्न 9. $\int_0^1 \int_0^2 (x+y) dx dy = \dots$

प्रश्न 10. $\sqrt{m} \sqrt{m + \frac{1}{2}} = \dots$

(5)

प्रश्न 2. अवकलनों के लिये डार्बू का मध्यमान प्रमेय लिखो व सिद्ध करो।
Write & prove the Darboux Intermediate value theorem for derivatives.

OR

परिमित रूप में लेगरांजे रूप के अवशेष सहित टेलर प्रमेय को लिखो व सिद्ध करो।
Write & prove Taylor theorem in finite form with Lagranges form of Remainder.

$$\text{प्रश्न 3. यदि } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & , \quad x^4 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

तो दर्शाओं कि then show that $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$
का अस्तित्व नहीं है। does not exist.

OR

समीकरण $\sin^2 2z \frac{d^2 y}{dz^2} + \sin 4z \frac{dy}{dz} + 4y = 0$ का रूपान्तरण $\tan z = e^x$
रखकर करो।

Transform the equation $\sin^2 2z \frac{d^2 y}{dz^2} + \sin 4z \frac{dy}{dz} + 4y = 0$ by substituting
 $\tan z = e^x$

प्रश्न 4. सरल रेखाओं $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ के कुल का एनवेलोप ज्ञात करो जबकि $a^2 + b^2 = c^2$

जहाँ a व b प्राचल है व c एक अचर है।

Find the envelope of family of straight lines $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ where

$a^2 + b^2 = c^2$, a & b are parameters & c is a constant.

P.T.O.

(3)

Section - 'B'

निम्नांकित लघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर 150-200 शब्द सीमा में दें
Answer the following short-answer-type questions with word
limit 150-200 (3x5=15)

प्रश्न 1. दर्शाओं कि Show that $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n}{5n^2 - 4} = \frac{3}{5}$

OR

निम्न श्रेणी की अभिसारिता की जाँच करो :

Test for convergency :

$$2x + \frac{3 \cdot x^2}{8} + \frac{4 \cdot x^3}{27} + \dots + \frac{(n+1)x^n}{n^3} + \dots, x > 0$$

प्रश्न 2. निम्न फलन के सातत्य की जाँच $x=0$ पर करो :

Test for continuity of following function at $x=0$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

OR

फलन $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ के लिये अन्तराल $[2, 4]$ में लेगरान्जे के मध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिये।

Verify Lagranges mean value theorem for function $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ in the interval $[2, 4]$.

प्रश्न 3. समघात फलनो पर यूलर प्रमेय को लिखो व सिद्ध करो।

Write the Euler theorem on homogeneous function and prove it.

P.T.O.

(4)

OR

यदि If $x + y + z = u; y + z = uv; z = uvw$

तो दर्शाओं कि then show that. $\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u, v, w)} = u^2v$

प्रश्न 4. परवलय $y^2 = 4ax$ का केन्द्रज ज्ञात कीजिये।

Find the evolute of parabola $y^2 = 4ax$

OR

मूलबिन्दु से समतल $x + 2y - 2z - 12 = 0$ की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिये।

Find the minimum distance of plane $x + 2y - 2z - 12 = 0$ from origin.

प्रश्न 5. दर्शाओं कि Show that: $\int_1^1 = 1$

OR

समाकलन के क्रम का परिवर्तन कीजिये।

Change the order of Integration.

$$\int_0^a \int_{mx}^{lx} V \, dx \, dy$$

Section - 'C'

निम्नांकित दीर्घ उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर 300-350 शब्द सीमा में दें

Answer the following long-answer-type questions with word

limit 300-350 (5x5=25)

प्रश्न 1. कौशी का सीमा पर प्रथम प्रमेय लिखो व सिद्ध करो।

Write & prove Cauchy's first theorem on Limit.

OR

निम्न श्रेणी की निरपेक्ष अभिसारिता की जाँच कीजिये।

Test for absolute convergence of following series.

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots \dots (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$