प्रश्न 5. दर्शाइए कि प्रत्येक सेपरेबल दूरिक समष्टि द्वितीय गणनीय होता है।
Show that every separable metric space is second countable.

OR

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संहत दूरिक समष्टि बोल्जानो वाइएस्ट्रास गुणधर्म रखता है।
Prove that every compact metric space has Bolzano Weierstrass property.

---x---

Roll No..... Total No. of Sections : 03

Total No. of Printed Pages : 06

Online Annual Examination - 2020

B.Sc. Part - III

MATHEMATICS

Paper - I

ANALYSIS

Max.Marks : 50

Time : 3 Hrs. Min.Marks : 17

टीप : खण्ड 'अ' में दस अतिलघूत्तरी प्रश्न हैं, जिन्हें हल करना अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघूत्तरी प्रश्न एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरी प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल करें।

Note : Section 'A', containing 10 very short-answer-type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short-answer-type questions and Section 'C' consists of long-answer-type questions. Section 'A' has to be solved first.

Section - 'A'

निम्नांकित अतिलघूत्तरी प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्यों में दें।
Answer the following very short-answer-type questions in one or two sentences. **(1x10=10)**

प्रश्न 1. "आंशिक संकलन" का कथन लिखिए।
Write statement of "Summation by Parts".

प्रश्न 2. यंग प्रमेय का कथन लिखिए।
Write the statement of young's theorem.

प्रश्न 3. रीमान समाकल को परिभाषित कीजिए।
Define Riemann integral.

प्रश्न 4. समाकलन गणित का मूलभूत प्रमेय का कथन लिखिए।
Write statement of fundamental Theorm of Integral Calculus.

प्रश्न 5. विश्लेषिक फलन को परिभाषित कीजिए।
Define Analytic Function.

प्रश्न 6. द्विरैखिक रूपांतरण को परिभाषित कीजिए।
Define bilinear transformation.

प्रश्न 7. दूरिक समाष्टि को परिभाषित कीजिए।
Define metric space.

प्रश्न 8. विवृत्त गोलक को परिभाषित कीजिए।
Define open sphere.

प्रश्न 9. संहत समाष्टि को परिभाषित कीजिए।
Define compact space.

प्रश्न 10. प्रथम व द्वितीय गणनीय समष्टियो को परिभाषित करो।
Define first and second countable spaces.

Section - 'B'

निम्नांकित लघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Answer the following short-answer-type questions: (3x5=15)

प्रश्न 1. फलन $f(x)=x$ का परास $0\le x\le 2$ में अर्द्ध परास कोज्या श्रेणी के रूप में व्यक्त करे।

Express $f(x)=x$ as a half range cosine series in the range $0\le x\le 2$.

OR

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, $(0,0)$ पर अवकलनीय नही हैं किन्तु $\frac{\partial f}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial f}{\partial y}$ दोनो $(0,0)$ पर विद्यमान है।

Prove that the function $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, is not differentiable at $(0,0)$ but $\frac{\partial f}{\partial x}$ and $\frac{\partial f}{\partial y}$ both exist at $(0,0)$.

प्रश्न 2. दर्शाइए कि प्रत्येक संतत फलन रीमान समाकलनीय होता है।
Show that every continuous function is Riemann integrable.

प्रश्न 2. समाकल $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए।

Test the convergence of the Integral $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$.

OR

फ्रुलैनी समाकलन के उपयोग से सिद्ध कीजिए कि :
Using Frullani's integration prove that :

$$\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} ax-\tan^{-1} bx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\log\frac{a}{b}$$

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक द्विरैखिक रूपांतरण जो केवल एक स्थिर बिन्दु α रखता हैं, निम्नलिखित रूप में रखा जा सकता हैं –

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{z-\alpha}+\lambda$$

Prove that every bilinear transformation that has only one fixed point α can be put into the following form $\frac{1}{w-z}=\frac{1}{z-\alpha}+\lambda$.

OR

सिद्ध कीजिए कि फलन $u=x^3-3xy^2+3x^2-3y^2+1$ लाप्लास समीकरण को संतुष्ट करता हैं तथा संगत विश्लेषिक फलन $u+iv$ को ज्ञात कीजिए।
Prove that the function $u=x^3-3xy^2+3x^2-3y^2+1$ satisfies Laplace's equation and determine corresponding analytic function $u+iv$.

प्रश्न 4. संकुचन प्रतिचित्रण सिद्धांत लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।
State and prove contraction mapping principle.

OR

यदि a,b कोई दो परिमेय संख्याएँ इस प्रकार है कि $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ एक परिमेय संख्या हैं तो सिद्ध करो कि $\sqrt{ab}$ भी एक परिमेय संख्या है।
Let a,b are two rational numbers and $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ is a rational number, prove that $\sqrt{ab}$ is also rational number.

OR

प्राचल के सापेक्ष अवकलन का उपयोग करते हुए $\int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}dx$, यदि $\alpha > -1$; का मान ज्ञात कीजिए।

Using differentiation with respect to parameter, find the value of $\int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}dx$, $\alpha > -1$.

प्रश्न 3. द्विरैखिक रूपांतरण $w = \frac{3z-4}{z-1}$ के स्थिर बिन्दु और संगत प्रसामान्य रूप ज्ञात कीजिए।

Find the fixed point and corresponding normal form to the bilinear transformation $w = \frac{3z-4}{z-1}$.

OR

उस द्विरैखिक रूपांतरण को ज्ञात करो जो अर्द्धसमतल $R(z) \geq 0$ को इकाई वृत्तीय चक्रिका $|w| \leq 1$ में आच्छादकतः रूपांतरित करता हैं।

Find the bilinear transformation which transform half plane $R(z) \geq 0$ on to the unit circular disc $|w| \leq 1$.

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या नही हैं।

Prove that $\sqrt{5}$ is not a rational number.

OR

सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि में प्रत्येक संवृत्त गोलक एक संवृत्त समुच्चय होता है।

Prove that in a metric space, every closed sphere is a closed set.

प्रश्न 5. दर्शाइए कि समष्टि $C[a,b]$ गणनीय सघन हैं।

Show that the space $C[a,b]$ is separable.

OR

मान लो (X,d) दूरीक समष्टि हैं तथा दूरीक $d_1 : X \times X \to R$ निम्नानुसार परिभाषित है : $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, प्रत्येक $x, y, \in X$ तब दिखाइए कि दूरीक d_1 और d तुल्य दूरीक हैं।

Let (X,d) be a metric space and metric $d_1 : X \times X \to R$ is defined as follows : $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$, for every $x, y, \in X$. Then show that metrics d_1 and d are equivalent matrices.

Section - 'C'

निम्नांकित दीर्घ उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Answer the following long-answer-type questions. (5x5=25)

प्रश्न 1. फलन $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & \text{जबकि } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{जबकि } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ के लिए श्वार्ज प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

Verify the Schwarz's theorem for the function :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & \text{where } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{where } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

OR

फलन $f(x) = |x|, -\pi < x < \pi$ के लिए फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Find the Fourier series of the function $f(x) = |x|, -\pi < x < \pi$.