प्रश्न 4. क्या रैखिक प्रतिचित्रण $T:V_3(R)\rightarrow V_3(R)$ जो $T(e_1)=e_1-e_2$, $T(e_2)=2e_2+e_3$, $T(e_3)=e_1+e_2+e_3$ द्वारा परिभाषित है, एकैकी और आच्छादक है?

A linear transformation $T:V_3(R)\rightarrow V_3(R)$ defined by $T(e_1)=e_1-e_2$, $T(e_2)=2e_2+e_3$, $T(e_3)=e_1+e_2+e_3$ is one-one and onto?

OR

मैट्रिक्स $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{bmatrix}$ के आइगन मान, संगत आइगन सदिश और आइगन समष्टियों को ज्ञात कीजिए।

Find eigen values, corresponding eigen vectors and eigen spaces of the matrix $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{bmatrix}$.

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि आंतर गुणन समष्टि में सदिश α और β रैखिकतः परतंत्र हैं यदि और केवल यदि $|(\alpha,\beta)|=\|\alpha\|.\|\beta\|$.

Prove that in an inner product space two vectors α and β are linearly dependent if and only if $|(\alpha,\beta)|=\|\alpha\|.\|\beta\|$.

OR

परिमित विमीय सदिश समष्टियों के लिए बेसल की असमयिका को लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Bessel's inequality for finite dimensional vector spaces.

---x---

Roll No.....................

Total No. of Sections : 03

Total No. of Printed Pages : 06

Online Annual Examination - 2020

B.Sc. - III

MATHEMATICS

Paper - II

ABSTRACT ALGEBRA

Max.Marks : 50

Time : 3 Hrs. **Min.Marks : 17**

टीप : खण्ड 'अ' में दस अतिलघूत्तरी प्रश्न हैं, जिन्हें हल करना अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघूत्तरी प्रश्न एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरी प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल करें।

Note : Section 'A', containing 10 very short-answer-type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short-answer-type questions and Section 'C' consists of long-answer-type questions. Section 'A' has to be solved first.

Section - 'A'

निम्नांकित अतिलघूत्तरी प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्यों में दें।
Answer the following very short-answer-type questions in one or two sentences. **(1x10=10)**

प्रश्न 1. $f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 9 & 8 & 7\end{pmatrix}$ की लंबाई का विभाजन ज्ञात कीजिए।

Find the division of length of $f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ 1 & 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 9 & 8 & 7\end{pmatrix}$.

प्रश्न 2. यदि $f(x), g(x)\in(I_8,\bullet_8)$ ज्ञात कीजिए $[f(x).g(x)]=?$ जहाँ $f(x)=2x+4x^2$, $g(x)=2+6x+4x^2$.

If $f(x), g(x)\in(I_8,\bullet_8)$ find $[f(x).g(x)]=?$ where $f(x)=2x+4x^2$, $g(x)=2+6x+4x^2$.

P.T.O.

प्रश्न 3. एकल समुच्चय रैखिकतः परतंत्र होगा या स्वतंत्र।

Singlton set in linearly dependent or independent.

प्रश्न 4. परिमित जनित सदिश समष्टि को परिभाषित कीजिए।

Define finitely generated vector space.

प्रश्न 5. फलन $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1, a_2, a_3)$ की अष्टि बताइये।

Find the kernel of $f(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1, a_2, a_3)$.

प्रश्न 6. $f(a,b) = (a+b, a-b, b)$ का परिसर ज्ञात कीजिए।

Find range of $f(a,b) = (a+b, a-b, b)$.

प्रश्न 7. $A(x_1, x_2) = 2x_1x_2 + x_2^2$ के संगत सममित आव्यूह क्या होगा।

What will be the corresponding symmetric matrix of $A(x_1, x_2) = 2x_1x_2 + x_2^2$.

प्रश्न 8. $A = x_1^2 + x_1x_2$ को विहित रूप में बदलिए।

Find canonical form of $A = x_1^2 + x_1x_2$.

प्रश्न 9. यदि $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ $V_3(R)$ का आधार है तथा $B^* = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, B$ का प्रसामान्य लांबिक आधार है तो α_3 का सूत्र बताइये।

If $B = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ is a basis of $V_3(R)$ then give the formula for α_3, where $B^* = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ is the orthonomal basis of B.

प्रश्न 10. क्या $(\alpha, \beta) = (x_1y_1 + x_3y_3)$, जहाँ $\alpha = (x_1, x_2, x_3), \beta = (y_1, y_2, y_3)$ एक आंतर गुणन है?

Is $(\alpha, \beta) = (x_1y_1 + x_3y_3)$ where $\alpha = (x_1, x_2, x_3), \beta = (y_1, y_2, y_3)$ an inner product?

Section - 'B'

निम्नांकित लघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर दें।

Answer the following short-answer-type questions : (3x5=15)

प्रश्न 1. दिखाइये कि $(\alpha, \beta) = \text{Re}(\alpha, \beta) + i.\text{Re}(\alpha, i\beta)$

Show that $(\alpha, \beta) = \text{Re}(\alpha, \beta) + i.\text{Re}(\alpha, i\beta)$.

प्रश्न 2. यदि F एक क्षेत्र है तो $F[x]$ को बहुपद क्षेत्र क्यों नहीं कहा जाता है। समझाइये।

If F is a field then why $F[x]$ is not polynomial field. Explian.

OR

दिखाइये कि R/I एक क्षेत्र होगा यदि और केवल यदि किसी क्रमविनिमय ईकाई अवयव सहित वलय R के लिए I महत्तम गुणजावलि है।

Show that R/I is a field if R is a commutative ring with unity and I is maximal ideal of R.

प्रश्न 3. यदि W_1 और W_2 किसी सदिश समष्टि $V(R)$ के सदिश उपसमष्टियां है तथा $S_1 = \{t^3 + 5t^2 - t + 3, t^3 - 5t^2 + 5, 3t^3 + 10t^2 - 5t - 5\}$ W_1 का जनक और $S_2 = \{t^3 + 4t^2 + 6, t^3 + 2t^2 - t + 5, 2t^3 - 3t + 9\}$ W_2 का जनक हो तो $\dim(W_1 \cap W_2)$ ज्ञात कीजिए।

If $V(R)$ is a vector space over R and W_1 and W_2 are subspaces of V. If W_1 generated by $S_1 = \{t^3 + 5t^2 - t + 3, t^3 - 5t^2 + 5, 3t^3 + 10t^2 - 5t - 5\}$ and W_2 is generated by $S_2 = \{t^3 + 4t^2 + 6, t^3 + 2t^2 - t + 5, 2t^3 - 3t + 9\}$ then find $\dim(W_1 \cap W_2)$.

OR

क्या $S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \alpha_1 = (1,1,2), \alpha_2 = (3,-1,0), \alpha_3 = (2,0,-1)$ R^3 का जनक है? S के सापेक्ष $(2,1,-6)$ के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

I s $S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \alpha_1 = (1,1,2), \alpha_2 = (3,-1,0), \alpha_3 = (2,0,-1)$ a generator of R^3? Then find coordinates of $(2,1,-6)$ with respacet to S.

OR

$V_3(R)$ में समुच्चय $\{(2,3,-1),(1,-2,-4)\}$ का विस्तार एक लांबिक आधार में कीजिए।

Expand set $\{(2,3,-1),(1,-2,-4)\}$ of $V_3(R)$ in an orthogonal basis.

प्रश्न 2. द्विघाती समघात $q = 2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 2zx$ की धनात्मक निश्चितता के लिए जाँच करें।

Test the positive definity of bilinear homogeneous form $q = 2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 2zx$.

OR

सिद्ध कीजिये कि $f(\alpha,\beta) = x_1y_2 - y_1x_2, \alpha = (x_1,x_2), \beta = (y_1,y_2)$ एक द्विएकघाती समघात है।

Prove that $f(\alpha,\beta) = x_1y_2 - y_1x_2, \alpha = (x_1,x_2), \beta = (y_1,y_2)$ is a bilinear homogeneous form.

प्रश्न 3. क्या $S = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$, $V_3(R)$ का आधार है, समझाइये।

Explain $S = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$ is a basis of $V_3(R)$ or not.

OR

यदि W_1 और W_2, $V(F)$ के दो उपसमष्टियाँ हैं तो क्या $W_1 \cup W_2$ भी $V(F)$ का उपसमष्टि होगा, विस्तार से समझाइये।

If W_1 and W_2 are two vector subspaces of vector space $V(F)$ then, is $W_1 \cup W_2$ also a subspace of $V(F)$, explain in brief.

प्रश्न 4. किन्हीं दो तुल्यकारी पूर्णांकीय प्रांतों के विभाग क्षेत्र तुल्यकारी होते हैं, सिद्ध कीजिए।

Prove that the two quotient field of two isomorphic intrgral domains are also isomorphic.

OR

माना J पूर्णांकों का वलय है तथा Jn पूर्णांक माड्यूलों n का वलय है। फलन $\phi : J \rightarrow Jn$ तो किसी $a \in J$ के लिए ϕ(a)= शेषफल, जबकि a को n से भाग दिया जाता है, से परिभाषित है। ϕ की अष्टि ज्ञात कीजिए।

Let J is a ring of intragers and Jn is a ring of intrgral modulo n. A function $\phi : J \rightarrow Jn$, for $a \in J$ ϕ(a)= reminder, when a is divided by n, is defined. Find kernel of ϕ.

प्रश्न 5. सरल समूह को परिभाषित करते हुए बताइये कि क्या कोटि 56 का कोई समूह सरल समूह होगा या नहीं।

Is any group of order 56 simple group or not, also define the simple group.

OR

किसी अनंत समूह की स्वकारिताओं के समूह की कोटि 2 होती है, सिद्ध कीजिए।

Prove that the order of group of automorphism of an intinite group is 2.

Section - 'C'

निम्नांकित दीर्घ उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर 300–350 शब्द सीमा में दें
Answer the following long-answer-type questions with word limit 300-350 **(5x5=25)**

प्रश्न 1. स्वाकारिता को समझाते हुए बताइये कि कोटि 12 का कोई चक्रिय समूह G, $f(x) = x^3, \; f : G \rightarrow G, \; x \in G$. स्वकारिता होगा या नहीं।

Explain automorphism and discuss the automorphism of cyclic group G of order 12 and $f(x) = x^3, \; f : G \rightarrow G, \; x \in G$.

OR

कोटि 7 के चक्रीय समूह की सहायता से कोटि 21 के एक अक्रमविनिमय (अनआबेली) समूह की रचना कीजिए।

Construct a nonabelian (non commutative) group of order 21, with help of cyclic group of order 7.