

(6)

Code No. : S-158

Roll No.....

Total No. of Sections : 03

Total No. of Printed Pages : 06

OR

यदि f समूह G का समूह G' में एक अन्तर्क्षेपी समाकारिता है तो f का कर्नेल K , G का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

If f is on to homomorphism of a group G in to group G' . Then kernel of f i.e. K is a normal subgroup of group G .

प्रश्न 5. यदि $2\cos\theta = x + \frac{1}{x}$ और $2\cos\theta = y + \frac{1}{y}$ तो सिद्ध कीजिए

$$x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} \text{ का मान } 2\cos(m\theta + n\phi) \text{ है।}$$

$$\text{If } 2\cos\theta = x + \frac{1}{x} \text{ and } 2\cos\theta = y + \frac{1}{y}$$

then prove that the value of $x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n}$ is $2\cos(m\theta + n\phi)$.

OR

सिद्ध कीजिए कि (Prove that) :

$$\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{ix}{2} \right) = i \tan^{-1}(\sin hx)$$

---X---

Code No. : S-158

Annual Examination - 2019

B.Sc. Part - I

MATHEMATICS

Paper - I

ALGEBRA AND TRIGONOMETRY

Max.Marks : 50

Time : 3 Hrs.

Min.Marks : 17

टीप : खण्ड 'अ' में दस अतिलघूत्तरी प्रश्न हैं, जिन्हें हल करना अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघूत्तरी प्रश्न एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरी प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल करें।

Note : Section 'A', containing 10 very short-answer-type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short-answer-type questions and Section 'C' consists of long-answer-type questions. Section 'A' has to be solved first.

Section - 'A'

निम्नांकित अतिलघूत्तरी प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्यों में दें।

Answer the following very short-answer-type questions in one or two sentences.

(1x10=10)

प्रश्न 1. तुल्य आव्यूह की परिभाषा दीजिए।

Define Equivalence matrices.

प्रश्न 2. आव्यूह का अभिलाक्षणिक समीकरण क्या होता है?

What is characteristic equation of matrix?

प्रश्न 3. व्युत्क्रम समीकरण को परिभाषित कीजिए।

Define Reciprocal Equation.

प्रश्न 4. दकार्ते का चिन्ह नियम लिखिए।

Write Descarte's Rule of sign.

प्रश्न 5. तुल्यता वर्ग की परिभाषा दीजिए।

Define Equivalence Class.

P.T.O.

(2)

Code No. : S-158

प्रश्न 6. समूह की कोटि को पारिभाषित करो।

Define Order of a Group.

प्रश्न 7. समूहों की तुल्यकारिता को पारिभाषित कीजिए।

Define Isomorphism of groups.

प्रश्न 8. लाग्रान्ज प्रमेय का कथन लिखिए।

Write the statement of Lagrange's Theorem.

प्रश्न 9. $(\cos \theta + i \sin \theta)^{p/q}$ में कितने मूल होते हैं?

How many roots are there in $(\cos \theta + i \sin \theta)^{p/q}$?

प्रश्न 10. द-मायवर प्रमेय का कथन लिखिए।

Write the statement of De-Moivre's Theorem.

Section - 'B'

निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दें।

Solve the following questions :

(3x5=15)

प्रश्न 1. आव्यूह A की जाति ज्ञात कीजिए :

Find the rank of matrix A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

OR

निम्नलिखित आव्यूह 'A' के आइगेन मानों को ज्ञात कर संगत आइगेन सदिशों को ज्ञात कीजिए।

Find Eigen values & corresponding Eigen vectors of the following matrix A :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(5)

Code No. : S-158

OR

निम्न आव्यूह का कैलि हैमिल्टन प्रमेय का सत्यापन कर A^{-1} ज्ञात कीजिए।

Verify Cayley-Hamilton's theorem of the following matrix & find A^{-1}

$$\text{where } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 2. समीकरण $2x^3 + 6x^2 + 5x + k = 0$ में k का मान ज्ञात कीजिए जबकि मूल समान्तर श्रेणी में है और संगत मूलों को ज्ञात कीजिए।

Find the value of k of the equation $2x^3 + 6x^2 + 5x + k = 0$ if their roots are in A.P. find their roots.

OR

समीकरण $x^3 - 15x - 126 = 0$ को कार्डन विधि से हल कीजिए।

Solve the equation $x^3 - 15x - 126 = 0$ by Cardan's method.

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि सभी धन परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q_+ संक्रिया $*$ के सापेक्ष एक आबेली समूह बनाता है। जबकि संक्रिया $*$ निम्न प्रकार से परिभाषित है :

Prove that the set of all positive rational numbers Q_+ is an abelian group of the operation $*$, where $*$ is defined as follows :

$$a * b = \frac{ab}{2}, \forall a, b \in Q_+$$

OR

मान लो H तथा K एक समूह G के दो उपसमूह हैं तब :

Let H and K be two subgroups of the group G . then prove that :

$$O(HK) = \frac{O(H) \cdot O(K)}{O(H \cap K)}$$

प्रश्न 4. एक क्रमविनिमेय वलय का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब भी क्रमविनिमेय वलय होता है।

Every Homomorphic Image of a commutative ring is also a commutative ring.

P.T.O.

प्रश्न 2. यदि समीकरण $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α, β, γ हो तो निम्न सममित फलनों को ज्ञात कीजिए।

If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, then find the following symmetric functions:

1. $\sum \alpha^2$ 2. $\sum \frac{1}{\alpha}$ 3. $\sum \alpha^2 \beta$

OR

फेरारी विधि द्वारा चतुर्घात समीकरण को हल कीजिए :

$$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 24x + 15 = 0$$

Solve bi-quadratic equation by Ferrari's Method :

$$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 24x + 15 = 0$$

प्रश्न 3. दर्शाइये कि सभी पूर्णाकों के समुच्चय I में संबंध

$$R = \{(a, b) : a, b \in I, a - b, 3 \text{ से विभाज्य है}\} \text{ एक तुल्यता सम्बन्ध है।}$$

Show that in the set of all integers I , the Relation

$$R = \{(a, b) : a, b \in I, a - b \text{ is divisor by } 3\} \text{ is an equivalence relation.}$$

OR

यदि प्रतिचित्रण $f : R \rightarrow R, f(x) = 2x + 3$ द्वारा तथा प्रतिचित्रण $g : R \rightarrow R, g(x) = x^2 + 1$ द्वारा परिभाषित हो तो $(gof)(x)$ तथा $(fog)(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

If a mapping $f : R \rightarrow R, f(x) = 2x + 3$ and a mapping $g : R \rightarrow R, g(x) = x^2 + 1$ is defined, then find the values of $(fog)(x)$ and $(gof)(x)$.

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक चक्रीय समूह एक आबेली समूह होता है।

Prove that every cyclic group is an Abelian group.

OR

यदि $f : G \rightarrow G'$ कोई समूह समाकारिता है तो f एकैक होगा यदि और

प्रश्न 2. यदि समीकरण $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α, β, γ हो तो निम्न सममित फलनों को ज्ञात कीजिए।

If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, then find the following symmetric functions:

1. $\sum \alpha^2$ 2. $\sum \frac{1}{\alpha}$ 3. $\sum \alpha^2 \beta$

OR

फेरारी विधि द्वारा चतुर्घात समीकरण को हल कीजिए :

$$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 24x + 15 = 0$$

Solve bi-quadratic equation by Ferrari's Method :

$$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 24x + 15 = 0$$

प्रश्न 3. दर्शाइये कि सभी पूर्णाकों के समुच्चय I में संबंध

$$R = \{(a, b) : a, b \in I, a - b, 3 \text{ से विभाज्य है}\} \text{ एक तुल्यता सम्बन्ध है।}$$

Show that in the set of all integers I , the Relation

$$R = \{(a, b) : a, b \in I, a - b \text{ is divisor by } 3\} \text{ is an equivalence relation.}$$

OR

यदि प्रतिचित्रण $f : R \rightarrow R, f(x) = 2x + 3$ द्वारा तथा प्रतिचित्रण $g : R \rightarrow R, g(x) = x^2 + 1$ द्वारा परिभाषित हो तो $(gof)(x)$ तथा $(fog)(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

If a mapping $f : R \rightarrow R, f(x) = 2x + 3$ and a mapping $g : R \rightarrow R, g(x) = x^2 + 1$ is defined, then find the values of $(fog)(x)$ and $(gof)(x)$.

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक चक्रीय समूह एक आबेली समूह होता है।

Prove that every cyclic group is an Abelian group.

OR

यदि $f : G \rightarrow G'$ कोई समूह समाकारिता है तो f एकैक होगा यदि और

केवल यदि $\ker f = \{e\}$, जहाँ $\ker f$, f की अष्टि है तथा e , समूह G का तत्समक अवयव है।

If $f : G \rightarrow G'$ is any group homomorphism, then f is one-one if and only if $\ker f = \{e\}$, where $\ker f$ is the kernel of f & e is an identity of a group G .

प्रश्न 5. यदि m, n धन पूर्णांक हों, तो सिद्ध कीजिए कि :

If m, n are positive integers, then prove that :

$$(a+ib)^{m/n} + (a-ib)^{m/n} = 2(a^2+b^2)^{m/2n} \cos\left(\frac{m}{n} \tan^{-1} \frac{b}{a}\right)$$

OR

C+iS विधि से निम्न श्रेणी का योगफल ज्ञात कीजिए :

Find summation of following series by C+iS method :

$$\cos \theta - \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 3\theta}{3} - \dots - \infty$$

Section - 'C'

निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दें।

Solve the following questions :

(5x5=25)

प्रश्न 1. व्युत्क्रमणीय आव्यूहों P तथा Q को ज्ञात कीजिए जो इस प्रकार है कि PAQ प्रसामान्य रूप में है जहाँ :

Find Non-singular matrices P and Q is such that PAQ is in the Normal form of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

केवल यदि $\ker f = \{e\}$, जहाँ $\ker f$, f की अष्टि है तथा e , समूह G का तत्समक अवयव है।

If $f : G \rightarrow G'$ is any group homomorphism, then f is one-one if and only if $\ker f = \{e\}$, where $\ker f$ is the kernel of f & e is an identity of a group G .

प्रश्न 5. यदि m, n धन पूर्णांक हों, तो सिद्ध कीजिए कि :

If m, n are positive integers, then prove that :

$$(a+ib)^{m/n} + (a-ib)^{m/n} = 2(a^2+b^2)^{m/2n} \cos\left(\frac{m}{n} \tan^{-1} \frac{b}{a}\right)$$

OR

C+iS विधि से निम्न श्रेणी का योगफल ज्ञात कीजिए :

Find summation of following series by C+iS method :

$$\cos \theta - \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 3\theta}{3} - \dots - \infty$$

Section - 'C'

निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दें।

Solve the following questions :

(5x5=25)

प्रश्न 1. व्युत्क्रमणीय आव्यूहों P तथा Q को ज्ञात कीजिए जो इस प्रकार है कि PAQ प्रसामान्य रूप में है जहाँ :

Find Non-singular matrices P and Q is such that PAQ is in the Normal form of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$