

(6)

Code No. : S-160

Prove that two conics $\frac{l_1}{r} = 1 + e_1 \cos \theta$ and $\frac{l_2}{r} = 1 + e_2 \cos(\theta - \alpha)$ touch each other if $l_1^2(1 - e_2)^2 + l_2^2 = 2l_1l_2(1 - e_1e_2 \cos \alpha)$.

प्रश्न 4. उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसका निर्देशांक वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - y + z = 3$ है।

Find the equation of right circular cylinder with guiding circle $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - y + z = 3$

OR

समतल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ निर्देशांकों से A, B, C पर मिलता है। सिद्ध कीजिये कि 0 से वृत्त ABC पर खींची गयी रेखाएँ शंकु

$yz\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + zx\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + xy\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 0$ को जनित करती है।

The plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ meets co-ordinate axes at A, B, C. Prove that the lines from 0 to the circle ABC generates the cone

$yz\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + zx\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + xy\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = 0$

प्रश्न 5. अति परवलयज $yz + 2zx + 3xy + 6 = 0$ के बिन्दु $(-1, 0, 3)$ से जाने वाले जनकों के समीकरण ज्ञात कीजिये।

Find equation of generators passing through point $(-1, 0, 3)$ of hyperboloid $yz + 2zx + 3xy + 6 = 0$.

OR

वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिये जब समतल $lx + my + nz = p$ सकेन्द्र शंकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ का स्पर्श तर्ल हो।

Find the condition that the plane $lx + my + nz = p$ is tangent plane of the central conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.

---X---

Roll No.....

Total No. of Sections : 03

Total No. of Printed Pages : 06

Code No. : S-160

Annual Examination - 2019

B.Sc. Part - I

MATHEMATICS

Paper - III

VECTOR ANALYSIS AND GEOMETRY

Max.Marks : 50

Time : 3 Hrs.

Min.Marks : 17

टीप : खण्ड 'अ' में दस अतिलघूत्तरी प्रश्न हैं, जिन्हें हल करना अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघूत्तरी प्रश्न एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरी प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल करें।

Note : Section 'A', containing 10 very short-answer-type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short-answer-type questions and Section 'C' consists of long-answer-type questions. Section 'A' has to be solved first.

Section - 'A'

निम्नांकित अतिलघूत्तरी प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्यों में दें।
Answer the following very short-answer-type questions in one or two sentences. (1x10=10)

प्रश्न 1. किसी सदिश फलन की दिशा स्थिर होने के लिये आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध दीजिये।

Give the necessary and sufficient condition of a vector to have constant direction.

प्रश्न 2. व्युत्क्रम सदिशों की पद्धति लिखिये।

Write reciprocal system of vectors.

प्रश्न 3. गाउस का प्रमेय लिखिये।

State Gauss's Theorem.

प्रश्न 4. स्टोक्स प्रमेय का कार्तीय निरूपण लिखिये।

Write cartesian representation of Stoke's theorem.

P.T.O.

(2)

Code No. : S-160

प्रश्न 5. शांकवो का समीकरण लिखिये जो दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से संनाभि है।

Write equation of conics which are confocal with the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

प्रश्न 6. व्यापक द्विघातीय समीकरण कब दो सरल रेखाओं को प्रदर्शित करेगा?

When does general equation of second degree represent a pair of straight lines?

प्रश्न 7. किसी समतल का अन्तः खण्ड रूप का समीकरण लिखिये।

Write equation of the intercept form of any plane.

प्रश्न 8. उस लम्ब वृत्तीय बेलन का समीकरण लिखिये जिसका अक्ष y अक्ष है।

Write the equation of a right circular cylinder with axis as y-axis.

प्रश्न 9. एक पृष्ठी अतिपरवलयज का चित्र बनाइये।

Draw hyperboloid of one sheet.

प्रश्न 10. समतल $lx + my + nz = p$ तथा संनाभि शांकवज $\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1$

के स्पर्शिता की क्या शर्त है?

What is the condition that the plane $lx + my + nz = p$ and confocal conic

$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1$ touch each other?

Section - 'B'

निम्नांकित लघु उत्तरीय प्रश्नों को हल कीजिये :

Solve the following short-answer-type questions : (3x5=15)

प्रश्न 1. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन असमतलीय सदिश हैं, तो दर्शाइये कि

If $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are three non coplaner vectors, then show that

$$[\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}] = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]^2$$

(5)

Code No. : S-160

OR

यदि $\vec{F} = (x^2 - y^2)\hat{i} + xy\hat{j} + (y^2 - 2xy)\hat{k}$, तो $\text{div } \vec{F}$ तथा $\text{curl } \vec{F}$ ज्ञात कीजिये।

If $\vec{F} = (x^2 - y^2)\hat{i} + xy\hat{j} + (y^2 - 2xy)\hat{k}$, then find $\text{div } \vec{F}$ and $\text{curl } \vec{F}$.

प्रश्न 2. xy-समतल में समाकल $\int_C [(3x^2 - 8y^2)dx + (4y - 6xy)dy]$ के लिये ग्रीन

प्रमेय सत्यापित कीजिये, जहाँ C परवलयों $y = \sqrt{x}$ और $y = x^2$ से परिबद्ध क्षेत्र की परिसीमा है।

Verify Green's theorem in xy plane of

$\int_C [(3x^2 - 8y^2)dx + (4y - 6xy)dy]$ where C is the area surrounded

by the parabolas $y = \sqrt{x}$ and $y = x^2$.

OR

स्टोक्स प्रमेय का सत्यापन कीजिये जब $\vec{F} = (2x - y)\hat{i} - yz^2\hat{j} - y^2z\hat{k}$ है जहाँ S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का ऊपरी अर्द्धपृष्ठ है तथा C उसकी परिसीमा है।

Verify Stoke's theorem for $\vec{F} = (2x - y)\hat{i} - yz^2\hat{j} - y^2z\hat{k}$, where S is upper half surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ and C is its boundary line.

प्रश्न 3. शांकव का अनुरेखण कीजिये / Trace the conic :

$$21x^2 - 6xy + 29y^2 + 6x - 58y - 151 = 0$$

OR

सिद्ध कीजिए कि दो शांकव $\frac{l_1}{r} = 1 + e_1 \cos \theta$ तथा $\frac{l_2}{r} = 1 + e_2 \cos(\theta - \alpha)$ एक

दूसरे को स्पर्श करते हैं यदि $l_1^2(1 - e_2)^2 + l_2^2 = 2l_1l_2(1 - e_1e_2 \cos \alpha)$

(3)

Code No. : S-160

OR

यदि $\vec{r} = \log(1+t^2)\hat{i} + \sin t \hat{j} - t^2 \hat{k}$ हो तो $\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$ का मान ज्ञात कीजिये।

If $\vec{r} = \log(1+t^2)\hat{i} + \sin t \hat{j} - t^2 \hat{k}$ then evaluate $\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$.

प्रश्न 2. दिया गया है $\vec{r}(t) = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ जब $t = 2$
 $= 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, जब $t = 3$

दर्शाइये कि $\int_2^3 \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = 10$

Given that $\vec{r}(t) = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ when $t = 2$
 $= 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, when $t = 3$

then show that $\int_2^3 \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = 10$

OR

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ का मूल्यांकन कीजिये, जहाँ $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}$ तथा C , xy समतल में एक आयत है जो $y = 0$, $x = a$, $y = b$, $x = 0$ से घिरा है।

Evaluate $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ where $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}$ and C is a rectangle on xy plane surrounded by $y = 0$, $x = a$, $y = b$, $x = 0$

प्रश्न 3. दर्शाइये कि केन्द्र से दो दिये गये संनाभि शांकवों पर कोई दो समान्तर स्पर्श रेखाओं पर डाले गये लम्बों के वर्गों का अन्तर अचर होता है।

Show that the difference of the squares of the perpendiculars drawn from the centre of two confocal conics to the two parallel tangents, is constant.

OR

समीकरण $x^2 - 5xy + y^2 + 8x - 20y + 15 = 0$ कौन से शांकव को निरूपित करता है?

P.T.O.

(3)

Code No. : S-160

OR

यदि $\vec{r} = \log(1+t^2)\hat{i} + \sin t \hat{j} - t^2 \hat{k}$ हो तो $\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$ का मान ज्ञात कीजिये।

If $\vec{r} = \log(1+t^2)\hat{i} + \sin t \hat{j} - t^2 \hat{k}$ then evaluate $\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$.

प्रश्न 2. दिया गया है $\vec{r}(t) = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ जब $t = 2$
 $= 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, जब $t = 3$

दर्शाइये कि $\int_2^3 \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = 10$

Given that $\vec{r}(t) = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ when $t = 2$
 $= 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, when $t = 3$

then show that $\int_2^3 \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = 10$

OR

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ का मूल्यांकन कीजिये, जहाँ $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}$ तथा C , xy समतल में एक आयत है जो $y = 0$, $x = a$, $y = b$, $x = 0$ से घिरा है।

Evaluate $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ where $\vec{F} = (x^2 + y^2)\hat{i} - 2xy\hat{j}$ and C is a rectangle on xy plane surrounded by $y = 0$, $x = a$, $y = b$, $x = 0$

प्रश्न 3. दर्शाइये कि केन्द्र से दो दिये गये संनाभि शांकवों पर कोई दो समान्तर स्पर्श रेखाओं पर डाले गये लम्बों के वर्गों का अन्तर अचर होता है।

Show that the difference of the squares of the perpendiculars drawn from the centre of two confocal conics to the two parallel tangents, is constant.

OR

समीकरण $x^2 - 5xy + y^2 + 8x - 20y + 15 = 0$ कौन से शांकव को निरूपित करता है?

P.T.O.

(4)

Code No. : S-160

Which conic is represented by the equation

$$x^2 - 5xy + y^2 + 8x - 20y + 15 = 0 ?$$

- प्रश्न 4. वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $x + 2y + 3z = 3$ से होकर जाने वाले और समतल $4x + 3y - 15 = 0$ को स्पर्श करने वाले गोलों के समीकरण ज्ञात कीजिये।
Find equation of spheres passing through circle $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $x + 2y + 3z = 3$ and touching the plane $4x + 3y - 15 = 0$.

OR

दर्शाइये कि निर्देशाक्षों से होकर जाने वाले शंकु का व्यापक समीकरण $fyx + gzx + hxy = 0$ से व्यक्त होता है।

Show that the general equation $fyx + gzx + hxy = 0$ represents the cone passing through the axes.

- प्रश्न 5. सिद्ध कीजिये कि शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ का शंकु $\frac{x^2}{b+c} + \frac{y^2}{c+a} + \frac{z^2}{a+b} = 0$ के स्पर्शतल द्वारा प्रतिच्छेद एक समकोणिक अतिपरवलय है।

Prove that the intersection of conic $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ with tangent plane of cone $\frac{x^2}{b+c} + \frac{y^2}{c+a} + \frac{z^2}{a+b} = 0$ is rectangular hyperboloid.

OR

समीकरण $3x^2 + 7y^2 + 3z^2 + 10yz - 2zx + 10xy + 4x - 12y - 4z + 1 = 0$ का समानयन प्रमाणिक रूप में कीजिये।

Reduce the equation $3x^2 + 7y^2 + 3z^2 + 10yz - 2zx + 10xy + 4x - 12y - 4z + 1 = 0$ to the standard form.

Section - 'C'

निम्नांकित दीर्घ उत्तरीय प्रश्नों को हल कीजिये :

Solve the following long-answer-type questions : (5x5=25)

- प्रश्न 1. सिद्ध कीजिये / Prove that :

(i) $div(r^n \vec{r}) = (n+3)r^n$ (ii) $curl(r^n \vec{r}) = 0$

(4)

Code No. : S-160

Which conic is represented by the equation

$$x^2 - 5xy + y^2 + 8x - 20y + 15 = 0 ?$$

- प्रश्न 4. वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $x + 2y + 3z = 3$ से होकर जाने वाले और समतल $4x + 3y - 15 = 0$ को स्पर्श करने वाले गोलों के समीकरण ज्ञात कीजिये।
Find equation of spheres passing through circle $x^2 + y^2 + z^2 = 5$, $x + 2y + 3z = 3$ and touching the plane $4x + 3y - 15 = 0$.

OR

दर्शाइये कि निर्देशाक्षों से होकर जाने वाले शंकु का व्यापक समीकरण $fyx + gzx + hxy = 0$ से व्यक्त होता है।

Show that the general equation $fyx + gzx + hxy = 0$ represents the cone passing through the axes.

- प्रश्न 5. सिद्ध कीजिये कि शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ का शंकु $\frac{x^2}{b+c} + \frac{y^2}{c+a} + \frac{z^2}{a+b} = 0$ के स्पर्शतल द्वारा प्रतिच्छेद एक समकोणिक अतिपरवलय है।

Prove that the intersection of conic $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ with tangent plane of cone $\frac{x^2}{b+c} + \frac{y^2}{c+a} + \frac{z^2}{a+b} = 0$ is rectangular hyperboloid.

OR

समीकरण $3x^2 + 7y^2 + 3z^2 + 10yz - 2zx + 10xy + 4x - 12y - 4z + 1 = 0$ का समानयन प्रमाणिक रूप में कीजिये।

Reduce the equation $3x^2 + 7y^2 + 3z^2 + 10yz - 2zx + 10xy + 4x - 12y - 4z + 1 = 0$ to the standard form.

Section - 'C'

निम्नांकित दीर्घ उत्तरीय प्रश्नों को हल कीजिये :

Solve the following long-answer-type questions : (5x5=25)

- प्रश्न 1. सिद्ध कीजिये / Prove that :

(i) $div(r^n \vec{r}) = (n+3)r^n$ (ii) $curl(r^n \vec{r}) = 0$