

Roll No.....

Total No. of Sections : 03

Total No. of Printed Pages : 07

Code No. : S-258

Annual Examination - 2019

B.Sc. Part - II

MATHEMATICS

Paper - I

ADVANCED CALCULUS

Max.Marks : 50

Min.Marks : 17

Time : 3 Hrs.

टीप : खण्ड 'अ' में दस अतिलघृतरी प्रश्न हैं, जिन्हें हल करना अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघृतरी प्रश्न एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरी प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल करें।

Note : Section 'A', containing 10 very short-answer-type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short-answer-type questions and Section 'C' consists of long-answer-type questions. Section 'A' has to be solved first.

Section - 'A'

निम्नांकित अतिलघृतरी प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्यों में दें।

Answer the following very short-answer-type questions in one or two sentences. (1x10=10)

प्रश्न 1. कौशी अनुक्रम का कथन लिखिए।

Write statement of Cauchy sequence.

प्रश्न 2. P के किस मान पर, अनंत श्रेणी $\frac{1}{3^P} + \frac{1}{5^P} + \frac{1}{7^P} + \frac{1}{9^P} + \dots \infty$ अभिसारी है?

For what value of P , infinite sequence $\frac{1}{3^P} + \frac{1}{5^P} + \frac{1}{7^P} + \frac{1}{9^P} + \dots \infty$ is convergent?

प्रश्न 3. ज्ञात कीजिये कि बिन्दु $x=0$ पर, फलन $f(x) = \frac{1}{x}$ संतत है या नहीं? स्पष्ट कीजिये।

Dertermine whether the function $f(x) = \frac{1}{x}$, at point $x=0$ is continuous or not? Justify.

प्रश्न 4. व्यापक मध्यमान प्रमेय का कथन लिखिए।

Write statement of Generalised mean value theorem.

प्रश्न 5. समघात फलन की परिभाषा लिखिए।

Define Homogeneous function.

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए कि :

Prove that :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (xy - 3x + 4) = 0$$

प्रश्न 7. किसी चक्रज $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ का केन्द्रज क्या होगा?

What will be the evolute of the cycloid $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$?

प्रश्न 8. फलन के पल्याण बिन्दु से क्या तात्पर्य है?

What is meant by saddle point of function?

प्रश्न 9. गामा फलन का द्विगुणन सूत्र लिखिए।

Write Duplicate formula for Gamma function.

प्रश्न 10. डिर्ले का समाकल का कथन लिखिए।

State Dirichlet's Integral.

OR

फलन $f(x, y) = x^3 - 4xy + 2y^2$ के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मानों की विवेचना कीजिए।

Discuss the maximum and minimum values of the function $f(x, y) = x^3 - 4xy + 2y^2$.

प्रश्न 5. दर्शाइये कि / Show that :

$$\int_0^{4a} \int_{x^2/4a}^{2\sqrt{ax}} dx dy = \int_0^{4a} \int_{y^2}^{2\sqrt{ay}} dy dx$$

समाकलन के क्षेत्र को दर्शाइए और समाकल का मूल्यांकन कीजिए।

Indicate the region of integration and evaluate the integral.

OR

सिद्ध कीजिए / Prove that :

$$\overline{(m)} \overline{(m + \frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\Pi}}{2^{2m-1}} \overline{(2m)}$$

जहाँ m धनात्मक वास्तविक संख्या है।

where m is a positive real number.

---x---

OR

लैग्रांज के मध्यमान प्रमेय का c ज्ञात कीजिए,

$$\text{जहाँ } f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x ; a=1, b=3.$$

Find c of Lagrange's mean value theorem where $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x ; a=1, b=3$.

प्रश्न 3. यदि $u = \tan^{-1} \frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

If $u = \tan^{-1} \frac{xy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, then prove that $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$.

OR

फलन $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ का $(x-2)$ और $(y-3)$ के घातों में प्रसार कीजिए।

Expand the function $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ in powers of $(x-2)$ and $(y-3)$.

प्रश्न 4. दिखाइए कि चक्रज का केन्द्रज एक अन्य चक्रज होता है।

Show that evolute of the cycloid is another cycloid.

Section - 'B'

निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दें।

Solve the following questions :

(3x5=15)

प्रश्न 1. मूल्यांकन कीजिए कि :

$$\text{Evaluate: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{1} \right)^1 \left(\frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{4}{3} \right)^3 \cdots \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right]^{y_n}$$

OR

कौशी के समाकलन परीक्षण से निम्नलिखित श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए :

Test the following sequence by Cauchy Integral test :

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots + \frac{1}{n^4} + \cdots$$

प्रश्न 2. मध्यवर्ती मान प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Intermediate Value Theorem.

OR

सिद्ध कीजिए प्रत्येक अवकलनीय फलन संतत होता है।

Prove that every differentiable function is continuous.

प्रश्न 3. समीकरण $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$ में स्वतंत्र चर x को z में परिवर्तित

कीजिए, जहाँ $x = \frac{1}{z}$.

Change the equation $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$ in independent variable x

into z , where $x = \frac{1}{z}$.

OR

यदि $u = e^{xyz}$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)e^{xyz}$$

If $u = e^{xyz}$, then prove that :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)e^{xyz}$$

प्रश्न 4. परवलय $y^2 = 4ax$ का केन्द्रज ज्ञात कीजिए।

Find the evolute of the parabola $y^2 = 4ax$.

OR

दिखाइये कि दो चरों का फलन $f(x, y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$ बिन्दु $(0, 0)$ पर न तो उच्चिष्ठ है और न ही निम्निष्ठ है।

Show that the function of two variables $f(x, y) = x^4 - 3x^2y + y^2$ is neither maximum and nor minimum at point $(0, 0)$.

प्रश्न 5. समाकलन का क्रम परिवर्तन कीजिए :

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dx dy$$

तथा इसका मान भी ज्ञात कीजिए।

Change the order of the Integral :

$$\int_0^\infty \int_x^\infty \frac{e^{-y}}{y} dx dy$$

and find the value of the integral.

OR

मान ज्ञात कीजिए $\iiint x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx dy dz$, जहाँ
 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ तथा $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \leq 1$.

Find the value $\iiint x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx dy dz$, where $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$
and $\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \leq 1$.

Section - 'C'

निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दें।

Solve the following questions :

(5x5=25)

प्रश्न 1. p - श्रेणी परीक्षण प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove p -series test theorem.

OR

निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए—

Test the convergency of the following series-

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

प्रश्न 2. श्रृंखला नियम के प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove Chain rule theorem.

P.T.O.