

A particle is projected along the inner surface of a rough sphere and is acted on by no forces, show that it will return to the point of projection

at the end of time $\frac{a}{\mu v} (e^{2\mu\pi} - 1)$. where a is the radius, v is velocity of

projection and μ be the coefficient of friction.

प्रश्न 5. गुरुत्वीय आकर्षण में m संहति का एक कण उर्ध्ववाधरतः ऊपर की ओर प्रक्षेपित किया जाता है। वायु का अवरोध वेग का mk गुना है। यदि v सीमांत वेग तथा λv प्रारंभिक वेग है तो दर्शाइये कि कण द्वारा प्राप्त महत्तम ऊंचाई

$$\frac{v^2}{g} [\lambda - \log(1 + \lambda)] \text{ है।}$$

A particle of mass m is projected vertically under gravity, the resistance of the air being mk times of the velocity. Show that the greatest height

attained by the particle is $\frac{v^2}{g} [\lambda - \log(1 + \lambda)]$, where v is terminal

velocity λv initial velocity.

OR

रेत से भरी एक गाड़ी एक अचर बल F द्वारा खींची जाती है। इसमें रेत, द्रव्यमान की λ इकाईयाँ प्रति सेकेंड की दर से गिर रहा है। दर्शाइये कि t

समय के अंत में इसका वेग $\frac{-F}{\lambda} \log\left(1 - \frac{\lambda t}{m}\right)$ है, जहां m प्रारंभ में गाड़ी तथा

रेत का द्रव्यमान है।

A trailer full of sand is pulled by a constant force F . Sand leaks out at the rate of λ units of mass per second. Show that the velocity at the end of

time t is $\frac{-F}{\lambda} \log\left(1 - \frac{\lambda t}{m}\right)$, where m is initial mass of trailer and contents.

---X---

Code No. : S-260

Annual Examination - 2019

B.Sc. Part - II

MATHEMATICS

Paper - III

MECHANICS

Max.Marks : 50

Time : 3 Hrs.

Min.Marks : 17

टीप : खण्ड 'अ' में दस अतिलघूत्तरी प्रश्न हैं, जिन्हें हल करना अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघूत्तरी प्रश्न एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरी प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल करें।

Note : Section 'A', containing 10 very short-answer-type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short-answer-type questions and Section 'C' consists of long-answer-type questions. Section 'A' has to be solved first.

Section - 'A'

निम्नांकित अतिलघूत्तरी प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्यों में दें।
Answer the following very short-answer-type questions in one or two sentences.
(1x10=10)

- प्रश्न 1. त्रिकोणमितीय प्रमेय लिखिए।
Write Trigonometrical Theorem.
- प्रश्न 2. साम्यावस्था अस्थायी होने की शर्त क्या है?
What is the condition for unstability of equilibrium?
- प्रश्न 3. कैटनरी में x तथा ψ के बीच संबंध लिखिए।
Write the relation between x and ψ in catenary.
- प्रश्न 4. पिच को परिभाषित कीजिए।
Define pitch.
- प्रश्न 5. सरल आवर्त गति का मानक समीकरण लिखिए।
Write the standard equation of simple harmonic motion.

(2)

Code No. : S-260

प्रश्न 6. प्रत्यास्थता मापांक किसे कहते हैं?

What is modulus of elasticity?

प्रश्न 7. यदि किसी कण की त्रिज्या एवं अनुप्रस्थ वेग एक दूसरे के समानुपाती है, तो कण का पथ क्या होगा?

If the radial and transverse velocity are proportional to each other, then what is the path of particle?

प्रश्न 8. प्रक्षेप्य की महत्तम उंचाई लिखिए।

Write the maximum height of projectile.

प्रश्न 9. एक कण अचर वेग v से r त्रिज्या वाले वृत्त के उपर भ्रमण करता है, तो उसका परिणामी त्वरण क्या होगा?

A particle moves with constant velocity v the on circle of radius r , what is the resultant acceleration?

प्रश्न 10. ऊर्जा संरक्षण का सिद्धांत लिखिए।

Write the law of conservation of energy.

Section - 'B'

निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दें।

Solve the following questions :

(3x5=15)

प्रश्न 1. एक दण्ड जिसका गुरुत्व केन्द्र उसे a तथा b दो भागों में विभाजित करता है, एक चिकने गोले के भीतर रखी हुई है। दर्शाइये कि यदि संतुलित अवस्था में क्षैतिज से उसका झुकाव θ है, गोले के केन्द्र पर दण्ड 2α कोण अंतरित

करती है, तो $\tan \theta = \frac{b-a}{b+a} \tan \alpha$.

A beam whose centre of gravity divides it into portions a and b is placed inside a smooth sphere, show that if θ be its inclination to the horizon in the position of equilibrium and 2α be the angle subtended

by the beam at the centre of the sphere, then $\tan \theta = \frac{b-a}{b+a} \tan \alpha$.

(7)

Code No. : S-260

OR

चिकने तल पर दो बिन्दुओं A तथा B को मिलाने वाली रेखा में एक कण सरल आवर्त गति में गतिमान है। इन बिन्दुओं से यह प्राकृतिक लंबाईयां a तथा a' की प्रत्यास्थ डोरियों से बंधा है। इसका प्रत्यास्था मापांक λ तथा λ'

है। दर्शाइये कि आवर्तकाल $2\pi \sqrt{m / \left(\frac{\lambda}{a} + \frac{\lambda'}{a'} \right)}$

A particle is performing S.H.M. in the line joining two points A and B on a smooth plane and is connected with these points by elastic strings of natural length a and a' . The moduli of elasticity being λ and λ' respectively. Show that the

periodic time is $2\pi \sqrt{m / \left(\frac{\lambda}{a} + \frac{\lambda'}{a'} \right)}$

प्रश्न 4. एक कण एक समतल वक्र पर गतिमान है। यदि स्पर्शरेखीय एवं अभिलांबिक त्वरण सदैव अचर रहते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि कोण ψ जो गति की दिशा समय t में घूमती है, समीकरण $\psi = A \log(1+Bt)$ द्वारा निर्धारित होता है।

A particle is describing a plane curve. If the tangential and normal acceleration are each constant throughout the motion, prove that the angle ψ through which the direction of motion turns in time t is given by $\psi = A \log(1+Bt)$.

OR

एक कण जिस पर कोई बल क्रिया नहीं कर रहा है, रूक्ष गोले में आंतरिक

पृष्ठ के अनुदिश प्रक्षिप्त किया जाता है। दर्शाइये कि यह $\frac{a}{\mu v} (e^{2\mu\pi} - 1)$

समय पश्चात प्रक्षेप बिन्दु पर वापस लौट आएगा। जहां a गोले की त्रिज्या, v प्रक्षेप वेग तथा μ घर्षण गुणांक है।

P.T.O.

(6)

Code No. : S-260

OR

दो बराबर समान छड़े AB तथा AC प्रत्येक की लंबाई $2b$ है, A पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़े हुए हैं। त्रिज्या a के एक चिकने उर्ध्ववाधर वृत्त पर विराम में है। दर्शाइये कि यदि उसके बीच का कोण 2θ हो तो $b\sin^3\theta = a\cos\theta$.

Two equal uniform rods AB and AC each of length $2b$ are freely jointed at A and rest on a smooth vertical circle of radius a show that if 2θ be the angle between them, then $b\sin^3\theta = a\cos\theta$.

प्रश्न 2. किसी घन की एक बिन्दुगामी कोरों OA, OB , तथा OC है। तथा AA', BB', CC' तथा OO' उसके विकर्ण है। BC', CA', AB' तथा OO' पर क्रमशः बल X, Y, Z तथा R क्रिया करते हैं। दिखाइये कि उनका केवल एक परिणामी बल है तब $(YZ + ZX + XY)\sqrt{3} + R(X + Y + Z) = 0$

OA, OB, OC are three coterminous edges of a cube and AA', BB', CC' and OO' are diagonals; Along BC', CA', AB' and OO' act forces equal to X, Y, Z and R respectively. Show that they are equivalent to a single resultant if $(YZ + ZX + XY)\sqrt{3} + R(X + Y + Z) = 0$.

OR

दर्शाइये कि व्यापक रूप में, दो बल निकाय संयुग्मी रेखाओं का केवल एक ही जोड़ा उभयनिष्ठ रखते हैं।

Show that in general two system of forces have only one pair of conjugate lines in common.

प्रश्न 3. आयाम a तथा आवर्तकाल T की सरल आवर्त गति में, दर्शाइये कि केन्द्र से x दूरी पर वेग V निम्न संबंध द्वारा दिया जाता है :

$$V^2 T^2 = 4\pi(a^2 - x^2)$$

Show that a S.H.M. of amplitude ' a ' and period T , the velocity V at a distance x from the centre is given by the relation :

$$V^2 T^2 = 4\pi(a^2 - x^2)$$

(3)

Code No. : S-260

OR

लम्बाई l के एक समांग चैन को समान क्षैतिज रेखा में दो बिन्दुओं A तथा B से इस प्रकार लटकाया गया है कि प्रत्येक अन्तस्थ तनाव निम्नतम बिन्दु के तनाव का n गुना है। दर्शाइये कि विस्तृति AB अवश्य ही

$$\frac{l}{\sqrt{n^2 - 1}} \log \left[n + \sqrt{n^2 - 1} \right] \text{ होगी।}$$

A uniform chain of length, is to be suspended from two points A and B in the same horizontal line so that the either terminal tension is n times that at the lowest point. Show that the span

$$\text{must be } \frac{l}{\sqrt{n^2 - 1}} \log \left[n + \sqrt{n^2 - 1} \right].$$

प्रश्न 2. दर्शाइये कि दिये गये बल निकाय के लिए राशियों $LX + MY + NZ$ एवं $X^2 + Y^2 + Z^2$ निश्चर रहती है, चाहे मूल बिन्दु एवं अक्ष कुछ भी हो।

Show that $LX + MY + NZ$ and $X^2 + Y^2 + Z^2$ are invariant for the system of force, whatever the origin and axis may be.

OR

एक बल निकाय जो (X, Y, Z, L, M, N) द्वारा दिया गया है, दो बराबर बलों से हटाते हैं। एक x के अनुदिश क्रियाशील है तथा एक

अन्य बल है। दर्शाइये कि बलों के परिमाण $\frac{LX + MY + NZ}{L}$ एवं

$$\left[\frac{(MY + NZ)^2 + L^2(Y^2 + Z^2)}{L} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ है।}$$

A system of forces given by (X, Y, Z, L, M, N) is replaced by two forces, on acting along the axis of x and another force. Show

that the magnitude of the forces are $\frac{LX + MY + NZ}{L}$ and

(4)

Code No. : S-260

$$\left[\frac{(MY + NZ)^2 + L^2(Y^2 + Z^2)}{L} \right]^{\frac{1}{2}}$$

प्रश्न 3. एक तोप के गोले का दो भिन्न-भिन्न प्रक्षेप कोणों के लिए एक दिये हुए क्षैतिज तल पर एक ही परास R है यदि गोलों के दो पथों पर गोले की महत्तम उंचाइयां h तथा k हो तो सिद्ध कीजिए कि $R^2 = 16hk$

A cannon ball has a range R on a horizontal plane for two distinct angles of projection. If h and k are the greatest heights in the two path, then prove that $R^2 = 16hk$.

OR

एक कण P अचर वेग से एक वक्र बनाता है तथ नियत बिन्दु O के सापेक्ष इसका कोणीय वेग इसकी O से दूरी के व्युत्क्रमानुपाती है। सिद्ध कीजिए कि वक्र एक समान कोणीय सर्पिल है।

A particle P describes a curve with constant velocity and its angular velocity about a given fixed point O varies inversely as its distance from O . Show that the curve is an equiangular spiral.

प्रश्न 4. एक कण पृथ्वी के पृष्ठ से वेग V से प्रक्षिप्त किया जाता है। यदि गुरुत्व में कमी विचारणीय है परंतु हवा का प्रतिरोध उपेक्षणीय है। दर्शाइये कि पथ एक दीर्घवृत्त है जिसका दीर्घाक्ष $2ga^2 / 2ga - v^2$, जहां a पृथ्वी की त्रिज्या है।

A particle is projected from the earth surface with velocity V . Show that if the diminutions of gravity is taken into account, but the resistance of the air neglected, the path can ellipse of major axis $2ga^2 / 2ga - v^2$, where ' a ' is the radius of earth.

OR

एक बिन्दु एक समान चाल v से सायक्लायड $s = 4a \sin \psi$ पर गमन करता

है। दर्शाइये कि पथ में किसी बिन्दु पर त्वरण $\frac{v^2}{\sqrt{16a^2 - S^2}}$ है।

(5)

Code No. : S-260

A point describes in the cycloid $s = 4a \sin \psi$ with uniform speed ' v '.

Show that the acceleration at any point is $\frac{v^2}{\sqrt{16a^2 - S^2}}$.

प्रश्न 5. किसी उर्ध्ववाधर तल में एक चिकने तार पर एक छल्ला एक अवरोध, जो वेग के वर्ग के समानुपाती है, के अंतर्गत गति करता है। कण की गति ज्ञात कीजिए।
A bead moves on a smooth wire in a vertical plane under the resistance which varies as square of the velocity. Find the motion of particle.

OR

एक कण त्रिविमिय दिशा में गतिमान है तो कातीय निदेशांक के पदों में कण का त्वरण ज्ञात कीजिए।

If a particle moves in three dimensions, then find the acceleration of the particle in terms of Cartesian co-ordinates.

Section - 'C'

निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दें।

Solve the following questions :

(5x5=25)

प्रश्न 1. एक ठोस समान अर्द्ध गोला जिसकी त्रिज्या r है अपने आधार पर समान पदार्थ से निर्मित एक ठोस लंबवृत्तीय शंकु रखता है, अर्द्धगोला त्रिज्या R के एक स्थिर गोले के उत्तल भाग पर टिका हुआ है। दर्शाइये कि शंकु का अक्ष स्थायित्व सहित संगत एक अल्प रोलिंग विस्थापन के लिए

$$\frac{r}{R+r} \left[\sqrt{(3R+r)(R-r)} - 2r \right] \text{ है।}$$

A solid homogeneous hemisphere of radius r has a solid right cone of the same substance constructed on its base, the hemisphere rests on the convex side of a fixed sphere of radius R , the axis of the cone consistent with stability for a small rolling

$$\text{displacement is } \frac{r}{R+r} \left[\sqrt{(3R+r)(R-r)} - 2r \right].$$