

(6)

Code No. : S-358

Roll No.....

Total No. of Sections : 03

Total No. of Printed Pages : 06

प्रश्न 4. यदि a, b कोई दो परिमेय संख्याएँ इस प्रकार है कि $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ एक परिमेय संख्या है तो सिद्ध करो कि \sqrt{ab} भी एक परिमेय संख्या है।

Let a, b are two rational number and $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ is a rational number, prove that \sqrt{ab} is also a rational number.

OR

सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q पूर्ण क्रमित क्षेत्र नहीं है।

Prove that the set Q of rational numbers is not a complete ordered field.

प्रश्न 5. बेयर संवर्ग प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove Baire's category theorem.

OR

मानलो (X, d) तथा (Y, ρ) दो दूरीक समष्टियाँ हैं और $f : X \rightarrow Y$ एक फलन है। तब f संतत है यदि और केवल यदि $f^{-1}(F)$ X में संवृत्त है जब कभी F, Y में संवृत्त है।

Let (X, d) and (Y, ρ) be two metric space and $f : X \rightarrow Y$ be a function. Then f is continuous if and only if $f^{-1}(F)$ is closed in X whenever F is closed in Y .

---X---

Code No. : S-358

Annual Examination - 2019

B.Sc. Part - III

MATHEMATICS

Paper - I

ANALYSIS

Max.Marks : 50

Time : 3 Hrs.

Min.Marks : 17

टीप : खण्ड 'अ' में दस अतिलघूत्तरी प्रश्न हैं, जिन्हें हल करना अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघूत्तरी प्रश्न एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरी प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल करें।

Note : Section 'A', containing 10 very short-answer-type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short-answer-type questions and Section 'C' consists of long-answer-type questions. Section 'A' has to be solved first.

Section - 'A'

निम्नांकित अतिलघूत्तरी प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्यों में दें।
Answer the following very short-answer-type questions in one or two sentences. (1x10=10)

प्रश्न 1. "आंशिक सकलन" का कथन लिखिए।

Write statement of "Summation by parts".

प्रश्न 2. स्वार्ज प्रमेय का कथन लिखिए।

Write statement of Schwarz's Theorem.

प्रश्न 3. समाकलन गणित का मूलभूत प्रमेय का कथन लिखिए।

Write statement of fundamental Theorem of Integral Calculus.

प्रश्न 4. पूर्णांकीय फलन को परिभाषित कीजिए।

Define Integral Function.

P.T.O.

(2)

Code No. : S-358

प्रश्न 5. विश्लेषिक फलन को परिभाषित कीजिए।

Define Analytic Function.

प्रश्न 6. सम्मिश्र संख्याओं की समता को परिभाषित कीजिए।

Define Equality of complex numbers.

प्रश्न 7. संकुचन प्रतिचित्रण को परिभाषित कीजिए।

Define Contraction mapping.

प्रश्न 8. पूर्ण दूरीक समष्टि को परिभाषित कीजिए।

Define Complete metric space.

प्रश्न 9. प्रथम संवर्ग एवं द्वितीय संवर्ग को परिभाषित कीजिए।

Define First category and second category.

प्रश्न 10. परिमित प्रतिच्छेदन गुणधर्म को परिभाषित कीजिए।

Define Finite Intersection property.

Section - 'B'

निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दें।

Solve the following questions :

(3x5=15)

प्रश्न 1. एक द्विक श्रेणी के लिये कौशी का अभिसरण के व्यापक सिद्धान्त की व्याख्या कीजिए।

Explain Cauchy's general principle of convergence for double series.

OR

उच्च कोटि के आंशिक अवकलन की व्याख्या कीजिए।

Explain partial derivatives of higher order.

प्रश्न 2. यदि $f : [a, b]$ परिबद्ध है तथा $P, [a, b]$ का कोई विभाजन है,

तब $L(P, f) \leq U(P, f)$

If $f : [a, b]$ is bounded and P , is any partition of $[a, b]$

then $L(P, f) \leq U(P, f)$

(5)

Code No. : S-358

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संतत फलन रीमान समाकलनीय होता है।

Prove that every continuous function is Riemann integrable.

OR

प्राचल के सापेक्ष अवकलन की सहायता से दर्शाइये कि :

$$\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} \alpha x}{x(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \log(1+\alpha) \text{ यदि } \alpha \geq 0$$

With the help of differentiation with respect to parameter show that :

$$\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} \alpha x}{x(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2} \log(1+\alpha) \text{ if } \alpha \geq 0$$

प्रश्न 3. यदि $f(z)$ z का विश्लेषिक फलन है, सिद्ध कीजिए कि :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) |R f(z)|^2 = 2 |f'(z)|^2$$

If $f(z)$ is an analytic function of z , prove that :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) |R f(z)|^2 = 2 |f'(z)|^2$$

OR

दर्शाइये कि $w = \sqrt{z}$ वृत्तों के परिवार $|z-1| = \lambda$ को द्विपाशी वक्रों लेमनिस्कॉट के परिवार $|w-1||w+1| = \lambda$ में रूपान्तरित करता है।

Show that the mapping $w = \sqrt{z}$ transforms the family of circles $|z-1| = \lambda$ into the family of lemniscates $|w-1||w+1| = \lambda$.

P.T.O.

(3)

Code No. : S-358

OR

समाकल का अभिसरण के लिये परीक्षण कीजिए : $\int_{-\infty}^0 e^x dx$

Test for convergence of Integral : $\int_{-\infty}^0 e^x dx$

प्रश्न 3. लांबिक निकाय की व्याख्या कीजिए।

Explain Orthogonal system.

OR

बिन्दु $Z_1 = 2, Z_2 = i, Z_3 = -2$ को बिन्दुओं $W_1 = 1, W_2 = i$ and $W_3 = -1$ में प्रतिचित्रित करने वाले द्विरैखिक रूपान्तरण को ज्ञात कीजिए।

Find the bilinear transformation which maps the points

$Z_1 = 2, Z_2 = i, Z_3 = -2$ into the points $W_1 = 1, W_2 = i$ and $W_3 = -1$.

प्रश्न 4. दिखाओ कि किसी दूरीक समष्टि में, प्रत्येक विवृत्त गोलक एक विवृत्त समुच्चय होता है।

Show that in a metric space every open sphere is an open set.

OR

दिखाओ कि किसी दूरीक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम एक कौशी अनुक्रम होता है।

Show that every convergent sequence in a metric space is a Cauchy sequence.

प्रश्न 5. दर्शाइये कि समष्टि $C[a, b]$ गणनीय सघन है।

Show that the space $C[a, b]$ is separable.

OR

दिखाओ कि किसी दूरीक समष्टि में दो संहत उप-समुच्चयों का संघ संहत होता है।

Show that the union of two compact subsets of a metric space is compact.

P.T.O.

(3)

Code No. : S-358

OR

समाकल का अभिसरण के लिये परीक्षण कीजिए : $\int_{-\infty}^0 e^x dx$

Test for convergence of Integral : $\int_{-\infty}^0 e^x dx$

प्रश्न 3. लांबिक निकाय की व्याख्या कीजिए।

Explain Orthogonal system.

OR

बिन्दु $Z_1 = 2, Z_2 = i, Z_3 = -2$ को बिन्दुओं $W_1 = 1, W_2 = i$ and $W_3 = -1$ में प्रतिचित्रित करने वाले द्विरैखिक रूपान्तरण को ज्ञात कीजिए।

Find the bilinear transformation which maps the points

$Z_1 = 2, Z_2 = i, Z_3 = -2$ into the points $W_1 = 1, W_2 = i$ and $W_3 = -1$.

प्रश्न 4. दिखाओ कि किसी दूरीक समष्टि में, प्रत्येक विवृत्त गोलक एक विवृत्त समुच्चय होता है।

Show that in a metric space every open sphere is an open set.

OR

दिखाओ कि किसी दूरीक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम एक कौशी अनुक्रम होता है।

Show that every convergent sequence in a metric space is a Cauchy sequence.

प्रश्न 5. दर्शाइये कि समष्टि $C[a, b]$ गणनीय सघन है।

Show that the space $C[a, b]$ is separable.

OR

दिखाओ कि किसी दूरीक समष्टि में दो संहत उप-समुच्चयों का संघ संहत होता है।

Show that the union of two compact subsets of a metric space is compact.

P.T.O.

Section - 'C'

निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दें।

Solve the following questions :

(5x5=25)

$$\text{प्रश्न 1. दर्शाइये कि फलन } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

स्वार्ज प्रमेय के प्रतिबंधों को संतुष्ट नहीं करता है तथा $fx_y(0, 0) \neq fy_x(0, 0)$.

$$\text{Show that the function } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

does not satisfy the conditions of shwarz theorem and $fx_y(0, 0) \neq fy_x(0, 0)$.

OR

फलन $f(x) = x \sin x$ का अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में फूरियर श्रेणी प्राप्त कीजिए। अतः निगमित कीजिए कि :

Obtain Fourier series of the function $f(x) = x \sin x$ in the interval $(-\pi, \pi)$. Hence deduce that :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} \dots\dots\dots$$

Section - 'C'

निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दें।

Solve the following questions :

(5x5=25)

$$\text{प्रश्न 1. दर्शाइये कि फलन } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

स्वार्ज प्रमेय के प्रतिबंधों को संतुष्ट नहीं करता है तथा $fx_y(0, 0) \neq fy_x(0, 0)$.

$$\text{Show that the function } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

does not satisfy the conditions of shwarz theorem and $fx_y(0, 0) \neq fy_x(0, 0)$.

OR

फलन $f(x) = x \sin x$ का अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में फूरियर श्रेणी प्राप्त कीजिए। अतः निगमित कीजिए कि :

Obtain Fourier series of the function $f(x) = x \sin x$ in the interval $(-\pi, \pi)$. Hence deduce that :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} \dots\dots\dots$$