प्रश्न 5. आन्तरगुणन समष्टि $V(F)$ में, सिद्ध कीजिए कि कोई दो सदिश α और β के लिए $|(\alpha,\beta)| \le \|\alpha\| \, \|\beta\|$.

In an inner product space $V(F)$, prove that for any two vectors α and β is $|(\alpha,\beta)| \le \|\alpha\| \, \|\beta\|$.

OR

यदि $B=\{\alpha_1, \alpha_2, ---, \alpha_n\}$ एक आन्तर गुणन समष्टि V में एक परिमित प्रसामान्य लम्बिक समुच्चय है और यदि $\beta \in V$, तो सिद्ध कीजिए :

If $B=\{\alpha_1, \alpha_2, ---, \alpha_n\}$ is any finite orthonormal set in an inner product space V and if $\beta \in V$, then prove that :

$$\sum_{i=1}^{m} |(\beta, \alpha_i)|^2 \le \|\beta\|^2$$

---x---

Roll No....................

Total No. of Sections : 03

Total No. of Printed Pages : 08

Code No. : S-359

Annual Examination - 2019

B.Sc. Part - III

MATHEMATICS

Paper - II

ABSTRACT ALGEBRA

Max.Marks : 50

Time : 3 Hrs. Min.Marks : 17

टीप : खण्ड 'अ' में दस अतिलघूत्तरी प्रश्न हैं, जिन्हें हल करना अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघूत्तरी प्रश्न एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरी प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल करें।

Note : Section 'A', containing 10 very short-answer-type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short-answer-type questions and Section 'C' consists of long-answer-type questions. Section 'A' has to be solved first.

Section - 'A'

निम्नांकित अतिलघूत्तरी प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्यों में दें।

Answer the following very short-answer-type questions in one or two sentences. **(1x10=10)**

प्रश्न 1. यदि G एक अनाबेली समूह है तो बताइये कि प्रतिचित्रण $f: G \to G$ जो कि $f(x)=x^{-1}, \forall x \in G$ से दिया गया है एक स्वाकारिता होगा/स्वाकारिता नहीं होगा ।

Let G be a non-abelian group. Then the mapping $f: G \to G$ given by $f(x)=x^{-1}, \forall x \in G$ is an automorphism / not an automorphism.

प्रश्न 2. समूह G के केन्द्र को परिभाषित कीजिए।

Define Centre of a group G.

प्रश्न 3. वलय समाकारिता के कर्नल को परिभाषित कीजिए।

Define Kernel of Ring Homomorphism.

प्रश्न 4. $f(x).g(x)$ पूर्णांकीय वलय पर ज्ञात कीजिए जहाँ :

Find $f(x).g(x)$ over the ring of integers where :

$$f(x) = 2x^0 + 3x + 5x^2 - 4x^3$$
$$g(x) = 3x^0 + 2x - 4x^3 + 5x^4$$

प्रश्न 5. □ (□) सदिश समष्टि क्यों नहीं है जहाँ □ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है और □ सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय है।

Why □ (□) is not a vector space, where □ is the set of reals and □ is the set of complex numbers.

प्रश्न 6. रैखिकतः स्वतंत्र सदिशों को परिभाषित कीजिए।

Define linearly independent vectors.

प्रश्न 7. एक फलन $T : V_3 \to V_1$ परिभाषित है:

$$T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

क्या T एक रैखिक रुपान्तरण है? स्पष्ट कीजिए।

Define a map $T : V_3 \to V_1$ by $T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Is T a linear transformation? Justify.

प्रश्न 8. यदि $U(F)$ और $V(F)$ दो सदिश समष्टि है और यदि f, $U(F)$ से $V(F)$ में समाकरिता है तो निम्नलिखित में से कौन सा कथन असत्य है:

Let $U(F)$ and $V(F)$ be two vector spaces over field F and if f is homomorphic mapping from $U(F)$ into $V(F)$, then which of the following statement is false :

i) $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta) \forall \alpha, \beta \in U$

ii) $f(a\alpha) = af(\alpha) \forall \alpha \in U, a \in F$

प्रश्न 3. यदि S और T, सदिश समष्टि $V(F)$ के दो उपसमुच्चय हो तो सिद्ध कीजिए कि :

If S and T are two subsets of a vector space $V(F)$, then prove that :

i) $S \subseteq T \Rightarrow L(S) \subseteq L(T)$ ii) $L(SUT) = L(S) + L(T)$

OR

सिद्ध कीजिए कि सदिश समष्टि $V(F)$ के प्रत्येक रैखिकतः स्वतंत्र उपसमुच्चय या तो V के आधार का भाग है या उसका विस्तार कर उसे V का आधार बनाया जा सकता है।

Prove that every linearly independent subset of a finitely generated vector space $V(F)$ forms a part of basis of V or can be extended to form a basis of V.

प्रश्न 4. यदि $V(F)$ और $U(F)$, क्षेत्र F पर दो सदिश समष्टि है माना कि $T : V \to U$ एक V से U पर कर्नल K के साथ रैखिक रुपान्तरण है तो सिद्ध कीजिए कि $V/_K \cong U$.

Let $V(F)$ and $U(F)$ be two vector spaces over the field F. Let $T : V \to U$ be a linear transformation from V onto U with kernel K, then prove that $V/_K \cong U$.

OR

सिद्ध कीजिए कि $rank(T) + nulity(T) = din U$, जहाँ T सदिश समष्टि $U(F)$ से $V(F)$ में एक रैखिक रुपान्तरण होगा ।

Prove that $rank(T) + nulity(T) = din U$, where T is a linear transformation from a vector space $U(F)$ into $V(F)$.

Section - 'C'

निम्नांकित प्रश्नों को हल करें :

Solve the following questions: **(5x5=25)**

प्रश्न 1. माना कि G एक परिमित आबेली समूह है और p एक विभाज्य संख्या है, यदि ${}^{p}\!/_{0}(G)$ तो सिद्ध करो कि अवयव $a \neq e \in G$ इस प्रकार अवश्य होगा कि $a^{p} = e$.

Let G be a finite abelian group let p be a prime. If ${}^{p}\!/_{0}(G)$ then prove that there is an element $a \neq e \in G$ such that $a^{p} = e$.

OR

माना कि G एक परिमित समूह है और p एक अभाज्य संख्या है। यदि p एक अभाज्य संख्या है। यदि ${}^{p^n}\!/_{0}(G)$ परन्तु $p^{n+1} \nmid 0(G)$, तो सिद्ध कीजिए कि G के p^{n} कोटि के दो उपसमूह संयुग्मी है।

Let G be a finite Group and let p be a prime. If ${}^{p^n}\!/_{0}(G)$ but $p^{n+1} \nmid 0(G)$, then prove that any two subgroups of G of order p^{n} are conjugate.

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए कि इकाई सहित क्रमविनीमेयी वलय एक क्षेत्र होगा यदि उसकी कोई भी उचित गुणजावली नहीं है।

Prove that a commutative ring with unity is a field if it has no proper ideals.

OR

निम्नलिखित बहुपदो का महत्तय सर्व भाजक ज्ञात कीजिए:

Find the greatest common divisor of the following polynomials :

$$f(x) = x^{3} - 3x^{2} + 2x - 6$$
$$g(x) = x^{3} - 4x^{2} + 4x - 3$$

iii) $f(0) = 0,$ जहाँ दोनों 0 समष्टि U के शून्य सदिश है।

$f(0) = 0,$ where both 0 are the zero vector of U.

iv) $f(-\alpha) = -f(\alpha) \forall \alpha \in U$

प्रश्न 9. यदि $V_2(R)$ समष्टि में $\alpha = (a_1, b_1)$ और $\beta = (a_2, b_2)$ के लिए जहाँ $(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + (a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2)$, तो $\alpha = (3,4) \in V_2(R)$ के लिये α का नॉर्म क्या होगा?

In $V_2(R)$ for $\alpha = (a_1, b_1)$ and $\beta = (a_2, b_2)$ inner product is defined by $(\alpha, \beta) = a_1 b_1 + (a_1 + a_2) \cdot (b_1 + b_2)$, then what will be the norm of the vector $\alpha = (3,4) \in V_2(R)$?

प्रश्न 10. यदि सदिश $X_1 = (1, 1, 1)$ तो (X_1, X_1) का मान क्या होगा?

If vector $X_1 = (1, 1, 1)$ then what will be the value of (X_1, X_1)?

Section - 'B'

निम्नांकित प्रश्नों को हल करें :

Solve the following questions: **(3x5=15)**

प्रश्न 1. माना कि G एक परिमित समूह है तो a के प्रसामान्यक का G में सूचकांक होगा :

Let G be a finite group then prove that the index of the normalizer of a in G will be :

$$C_a = 0(G) / 0(N(a))$$

OR

संयुग्मी संबंध को परिभाषित कीजिए और सिद्ध कीजिए कि संयुग्मता का संबंध समूह G पर तुल्यता संबंध है।

Define conjugacy relation and prove that conjugacy is an equivalence relation on a group G.

प्रश्न 2. सिद्ध करो कि फलन $f: C \to C$ जो कि $f(x+iy) = x - iy$ से परिभाषित है, जब $x, y \in R$ एक सम्मिश्र संख्याओं की वलय पर तुल्याकारिता है।

Prove that a mapping $f: C \to C$ given by $f(x+iy) = x - iy$ when $x, y \in R$, is an isomorphism of the ring of complex numbers onto itself.

OR

यदि $f: R \xrightarrow{onto} R'$ एक तुल्याकारिता है और R शून्य भाजक रहित वलय है तो सिद्ध कीजिए कि R' भी शून्य भाजक रहित वलय होगी।

If $f: R \xrightarrow{onto} R'$ is an isomorphism and R is a ring without zero divisor then prove that R' is also a ring without zero divisor.

प्रश्न 3. सिद्ध करो कि सदिश समष्टि $V(F)$ के दो उपसमष्टियों का सर्वनिष्ठ भी $V(F)$ का एक उपसमष्टि होगा।

Prove that the intersection of any two subspaces of vector space $V(F)$ is also a subspace of $V(F)$.

OR

सिद्ध करो कि $V_3(R)$ के चार सदिश $\alpha_1 = (1, 2, 3)$, $\alpha_2 = (1, 0, 0)$, $\alpha_3 = (0, 1, 0)$ और $\alpha_4 = (0, 0, 1)$ एक रैखिकतः परतंत्र समुच्चय बनाते है।

Prove that the four vectors $\alpha_1 = (1, 2, 3)$, $\alpha_2 = (1, 0, 0)$, $\alpha_3 = (0, 1, 0)$ and $\alpha_4 = (0, 0, 1)$ in $V_3(R)$ form a linearly dependent set.

प्रश्न 4. दर्शाइए कि फलन $T: V_3(R) \to V_2(R)$ जहाँ $T(a,b,c) = (c, a+b)$ है, एक रैखिक रुपान्तरण है।

Show that the mapping $T: V_3(R) \to V_2(R)$ defined by $T(a,b,c) = (c, a+b)$ is a linear transformation.

OR

रैखिक प्रतिचित्रण $T; R^3 \to R^2$ जो $T(x,y,z) = (2x - 4y + 9z,\ 5x + 3y - 2z)$ से परिभाषित है R^3 और R^2 के मानक आधार के सापेक्ष आव्यूह ज्ञात कीजिए।

Find the matrix of the linear map $T; R^3 \to R^2$ defined by $T(x,y,z) = (2x - 4y + 9z,\ 5x + 3y - 2z)$ with respect to the standard basis of R^3 and R^2.

प्रश्न 5. सिद्ध करो कि $V_2(R)$, जहाँ $\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2) \in V_2(R)$ एक आन्तर गुणन समष्टि है जहाँ आन्तर गुणन निम्न प्रकार से परिभाषित है:

$$(\alpha, \beta) = 3a_1 b_1 + 2a_2 b_2$$

Prove that $V_2(R)$, with $\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2) \in V_2(R)$, is an inner product space where inner product is defined as follows:

$$(\alpha, \beta) = 3a_1 b_1 + 2a_2 b_2$$

OR

सिद्ध करो कि आन्तरिक गुणन समष्टि V में अशून्य सदिशों का लाम्बिक समुच्चय रैखिकतः स्वतंत्र होता है।

Prove that any orthogonal set of non-zero vectors in a inner product space V is linearly independent.