प्रश्न 5. आन्तरगुणन समष्टि $V(F)$ में, सिद्ध कीजिए कि कोई दो सदिश α और β के लिए $|(\alpha,\beta)| \le \|\alpha\|\,\|\beta\|$.

In an inner product space $V(F)$, prove that for any two vectors α and β is $|(\alpha,\beta)| \le \|\alpha\|\,\|\beta\|$.

OR

यदि $B=\{\alpha_1, \alpha_2, ---, \alpha_n\}$ एक आन्तर गुणन समष्टि V में एक परिमित प्रसामान्य लम्बिक समुच्चय है और यदि $\beta \in V$, तो सिद्ध कीजिए :

If $B=\{\alpha_1, \alpha_2, ---, \alpha_n\}$ is any finite orthonormal set in an inner product space V and if $\beta \in V$, then prove that :

$$\sum_{i=1}^{m} |(\beta, \alpha_i)|^2 \le \|\beta\|^2$$

---x---

Roll No.....................

Total No. of Sections : 03

Total No. of Printed Pages : 08

Code No. : S-359

Annual Examination - 2019

B.Sc. Part - III

MATHEMATICS

Paper - II

ABSTRACT ALGEBRA

Max.Marks : 50

Time : 3 Hrs. Min.Marks : 17

टीप : **खण्ड 'अ' में दस अतिलघूत्तरी प्रश्न हैं, जिन्हें हल करना अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघूत्तरी प्रश्न एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरी प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल करें।**

Note : Section 'A', containing 10 very short-answer-type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short-answer-type questions and Section 'C' consists of long-answer-type questions. Section 'A' has to be solved first.

Section - 'A'

निम्नांकित अतिलघूत्तरी प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्यों में दें।
Answer the following very short-answer-type questions in one or two sentences. **(1x10=10)**

प्रश्न 1. यदि G एक अनाबेली समूह है तो बताइये कि प्रतिचित्रण $f: G \to G$ जो कि $f(x)=x^{-1}, \forall x \in G$ से दिया गया है एक स्वाकारिता होगा/स्वाकारिता नहीं होगा ।

Let G be a non-abelian group. Then the mapping $f: G \to G$ given by $f(x)=x^{-1}, \forall x \in G$ is an automorphism / not an automorphism.

प्रश्न 2. समूह G के केन्द्र को परिभाषित कीजिए।

Define Centre of a group G.

प्रश्न 3. वलय समाकारिता के कर्नल को परिभाषित कीजिए।

Define Kernel of Ring Homomorphism.

प्रश्न 4. $f(x).g(x)$ पूर्णांकीय वलय पर ज्ञात कीजिए जहाँ :

Find $f(x).g(x)$ over the ring of integers where :

$$f(x) = 2x^0 + 3x + 5x^2 - 4x^3$$
$$g(x) = 3x^0 + 2x - 4x^3 + 5x^4$$

प्रश्न 5. □ (□) सदिश समष्टि क्यों नहीं है जहाँ □ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है और □ सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय है।

Why □ (□) is not a vector space, where □ is the set of reals and □ is the set of complex numbers.

प्रश्न 6. रैखिकतः स्वतंत्र सदिशों को परिभाषित कीजिए।

Define linearly independent vectors.

प्रश्न 7. एक फलन $T: V_3 \to V_1$ परिभाषित है:

$$T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

क्या T एक रैखिक रुपान्तरण है? स्पष्ट कीजिए।

Define a map $T: V_3 \to V_1$ by $T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Is T a linear transformation? Justify.

प्रश्न 8. यदि $U(F)$ और $V(F)$ दो सदिश समष्टि है और यदि f, $U(F)$ से $V(F)$ में समाकरिता है तो निम्नलिखित में से कौन सा कथन असत्य है:

Let $U(F)$ and $V(F)$ be two vector spaces over field F and if f is homomorphic mapping from $U(F)$ into $V(F)$, then which of the following statement is false :

i) $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta) \forall \alpha, \beta \in U$

ii) $f(a\alpha) = af(\alpha) \forall \alpha \in U, a \in F$

प्रश्न 3. यदि S और T, सदिश समष्टि $V(F)$ के दो उपसमुच्चय हो तो सिद्ध कीजिए कि :

If S and T are two subsets of a vector space $V(F)$, then prove that :

i) $S \subseteq T \Rightarrow L(S) \subseteq L(T)$ ii) $L(SUT) = L(S) + L(T)$

OR

सिद्ध कीजिए कि सदिश समष्टि $V(F)$ के प्रत्येक रैखिकतः स्वतंत्र उपसमुच्चय या तो V के आधार का भाग है या उसका विस्तार कर उसे V का आधार बनाया जा सकता है।

Prove that every linearly independent subset of a finitely generated vector space $V(F)$ forms a part of basis of V or can be extended to form a basis of V.

प्रश्न 4. यदि $V(F)$ और $U(F)$, क्षेत्र F पर दो सदिश समष्टि है माना कि $T: V \to U$ एक V से U पर कर्नल K के साथ रैखिक रुपान्तरण है तो सिद्ध कीजिए कि $V/K \cong U$.

Let $V(F)$ and $U(F)$ be two vector spaces over the field F. Let $T: V \to U$ be a linear transformation from V onto U with kernel K, then prove that $V/K \cong U$.

OR

सिद्ध कीजिए कि $rank(T) + nulity(T) = din U$, जहाँ T सदिश समष्टि $U(F)$ से $V(F)$ में एक रैखिक रुपान्तरण होगा ।

Prove that $rank(T) + nulity(T) = din U$, where T is a linear transformation from a vector space $U(F)$ into $V(F)$.