

(6)

Code No. : S-158

प्रश्न 4. यदि $f:G \rightarrow G'$ समूह G से समूह G' पर एक समाकारिता है तब f एकैकी होगा यदि और केवल यदि $\ker f = k = \{e\}$

If $f:G \rightarrow G'$ is a homomorphism of a group G to group G' , then f is one one if and only if $\ker f = k = \{e\}$.

OR

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक फील्ड अनिवार्यतः एक पूर्णाकीय डोमेन होता है, परन्तु विलोम सदैव सत्य नहीं है।

Prove that every field is a compulsory Integral domain but converse is not true always.

प्रश्न 5. यदि $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$, तो सिद्ध कीजिए कि $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta$ तथा

$$x^n - \frac{1}{x^n} = 2i\sin n\theta$$

If $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$, then prove that $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta$ and

$$x^n - \frac{1}{x^n} = 2i\sin n\theta.$$

OR

यदि $\tan(\alpha + i\beta) = x + iy$ तो सिद्ध कीजिए कि :

If $\tan(\alpha + i\beta) = x + iy$ then prove that :

i) $x^2 + y^2 + 2x \cot 2\alpha = 1$

ii) $x^2 + y^2 - 2y \cot h2\beta + 1 = 0$

iii) $x \cot 2\alpha + y \cot h2\beta = 1$

---x---

Roll No.....

Total No. of Sections : 03

Total No. of Printed Pages : 06

Code No. : S-158

Annual Examination - 2018

B.Sc. Part - I

MATHEMATICS

Paper - I

ALGEBRA AND TRIGONOMETRY

Max.Marks : 50

Time : 3 Hrs.

Min.Marks : 17

टीप : खण्ड 'अ' में दस अतिलघूत्तरी प्रश्न हैं, जिन्हें हल करना अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघूत्तरी प्रश्न एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरी प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल करें।

Note : Section 'A', containing 10 very short-answer-type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short-answer-type questions and Section 'C' consists of long-answer-type questions. Section 'A' has to be solved first.

Section - 'A'

निम्नांकित अतिलघूत्तरी प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्यों में दें।
Answer the following very short-answer-type questions in one or two sentences. (1x10=10)

प्रश्न 1. हर्मिटीय और विषम हर्मिटीय आव्यूह की परिभाषा दीजिये।

Define Hermitian and Skew Hermitian matrix.

प्रश्न 2. ऐशेलान आव्यूह को परिभाषित कीजिए।

Define Echelon matrix.

प्रश्न 3. कैली-हैमिल्टन प्रमेय का कथन बताइये।

What is the statement of Cayley-Hamilton theorem.

प्रश्न 4. बहुपद समीकरण के मूल और इनके गुणांकों के बीच संबंध को लिखिए।

Write the relation between roots and coefficients of a polynomial equation.

P.T.O.

(2)

Code No. : S-158

प्रश्न 5. समीकरण के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए :

Find the nature of the roots of an equation :

$$2x^4 + 3x^3 - x^2 - 1 = 0$$

प्रश्न 6. तुल्यता संबंध को परिभाषित कीजिए ।

Define an Equivalence Relation.

प्रश्न 7. समूह $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ के प्रत्येक अवयव की कोटि ज्ञात कीजिए जबकि संयोजन योग मोड $6(+_6)$ है ।

Find the order of every element of a group $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ with operation is addition modulo $6(+_6)$.

प्रश्न 8. लाग्रान्जेज प्रमेय का कथन लिखिए ।

Write the statement of Lagrange's theorem.

प्रश्न 9. शून्य भाजक रहित वलय को परिभाषित कीजिए ।

Define without zero divisor in a Ring.

प्रश्न 10. ग्रेगोरी श्रेणी को लिखिए ।

Write the Gregories series.

Section - 'B'

निम्नांकित लघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

Answer the following short-answer-type questions. (3x5=15)

प्रश्न 1. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ के आइगेन मानों को ज्ञात कीजिए ।

Find the Eigen-Values of the Matrix $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$.

(5)

Code No. : S-158

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 2. निम्न समीकरणों को आव्यूह विधि से हल कीजिए :

Solve the following equations by matrix method :

$$2x - y + 3z = 9$$

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

OR

कार्डन विधि से त्रिघात $x^3 - 18x - 35 = 0$ को हल कीजिए ।

Solve the cubic equation $x^3 - 18x - 35 = 0$ by Cardan's method.

प्रश्न 3. एक समूह G के एक अरिक्त उपसमुच्चय H के एक उपसमूह होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध यह है कि $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$. जहाँ $b^{-1}, b \in H$ का प्रतिलोम है ।

The necessary and sufficient condition for a non-empty subset H of a group G is a subgroup of G if $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$, b^{-1} is the inverse of $b \in H$.

OR

यदि $f: X \rightarrow Y$ तथा $g: Y \rightarrow Z$ दो एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण हैं, तब सिद्ध कीजिए कि $gof: X \rightarrow Z$ एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण है तथा $(gof)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

If $f: X \rightarrow Y$ and $g: Y \rightarrow Z$ are two one-one onto mappings. Then prove that $gof: X \rightarrow Z$ is also a one-one onto mapping and also prove that $(gof)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

P.T.O.

(3)

Code No. : S-158

OR

निम्न आव्यूह का व्युत्क्रम कैले-हैमिल्टन प्रमेय की सहायता से ज्ञात कीजिए :
Find inverse of following matrix by Cayley-Hamilton theorem :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 2. यदि समीकरण $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$ के मूल गुणोत्तर श्रेणी में हो तो सिद्ध कीजिए कि $p^3r = q^3$

If the roots of the equation $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$ are in GP. Then prove that $p^3r = q^3$.

OR

समीकरण $x^4 + 8x^3 + x - 5 = 0$ को रूपान्तरित कीजिए जिसमें द्वितीय पद नहीं है ।

Transform the equation $x^4 + 8x^3 + x - 5 = 0$ whose second term is diminished (missing).

प्रश्न 3. यदि H_1 और H_2 एक समूह G के दो उपसमूह हैं तब $H_1 \cap H_2$ भी G का एक उपसमूह होता है ।

If H_1 and H_2 are two subgroups of a group G . Then $H_1 \cap H_2$ is also a subgroup of Group G .

OR

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह के दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ एक प्रसामान्य उपसमूह होता है ।

Prove that the intersection of any two Normal subgroups of a group is also a subgroup of that group.

प्रश्न 4. गुणात्मक समूह $G = \{1, -1, i, -i\}$ से तुल्याकारी नियमित क्रमचय समूह ज्ञात कीजिए ।

Find the Isomorphic Regular Group Permutation of the multiplicative group $G = \{1, -1, i, -i\}$.

P.T.O.

(3)

Code No. : S-158

OR

निम्न आव्यूह का व्युत्क्रम कैले-हैमिल्टन प्रमेय की सहायता से ज्ञात कीजिए :
Find inverse of following matrix by Cayley-Hamilton theorem :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 2. यदि समीकरण $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$ के मूल गुणोत्तर श्रेणी में हो तो सिद्ध कीजिए कि $p^3r = q^3$

If the roots of the equation $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$ are in GP. Then prove that $p^3r = q^3$.

OR

समीकरण $x^4 + 8x^3 + x - 5 = 0$ को रूपान्तरित कीजिए जिसमें द्वितीय पद नहीं है ।

Transform the equation $x^4 + 8x^3 + x - 5 = 0$ whose second term is diminished (missing).

प्रश्न 3. यदि H_1 और H_2 एक समूह G के दो उपसमूह हैं तब $H_1 \cap H_2$ भी G का एक उपसमूह होता है ।

If H_1 and H_2 are two subgroups of a group G . Then $H_1 \cap H_2$ is also a subgroup of Group G .

OR

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह के दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ एक प्रसामान्य उपसमूह होता है ।

Prove that the intersection of any two Normal subgroups of a group is also a subgroup of that group.

प्रश्न 4. गुणात्मक समूह $G = \{1, -1, i, -i\}$ से तुल्याकारी नियमित क्रमचय समूह ज्ञात कीजिए ।

Find the Isomorphic Regular Group Permutation of the multiplicative group $G = \{1, -1, i, -i\}$.

P.T.O.

(4)

Code No. : S-158

OR

सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ एक उपवलय होता है ।

Prove that the intersection of any two subrings of any ring is also a subring of that ring.

प्रश्न 5. यदि n कोई धनपूर्णांक है तो सिद्ध कीजिए कि

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}$$

If n is any positive integer. Then prove that

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}.$$

OR

सिद्ध कीजिए / Prove that :

$$\sin 6\theta = 6\cos^5\theta \sin\theta - 20\cos^3\theta \sin^3\theta + 6\cos\theta \sin^5\theta$$

Section - 'C'

निम्नांकित दीर्घ उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

Answer the following long-answer-type questions. (5x5=25)

प्रश्न 1. आव्यूह A को प्रसामान्य रूप में परिवर्तित कर आव्यूह की जाति ज्ञात कीजिए :

Transform the following Matrix A into Normal form & find their rank :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

OR

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ के आइगेन मानों को ज्ञात कीजिए तथा संगत

आइगेन सदिशों का निर्धारण भी कीजिए ।

Find the the Eigen Values & their corresponding Eigen Vectors of the Matrix.

(4)

Code No. : S-158

OR

सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ एक उपवलय होता है ।

Prove that the intersection of any two subrings of any ring is also a subring of that ring.

प्रश्न 5. यदि n कोई धनपूर्णांक है तो सिद्ध कीजिए कि

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}$$

If n is any positive integer. Then prove that

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}.$$

OR

सिद्ध कीजिए / Prove that :

$$\sin 6\theta = 6\cos^5\theta \sin\theta - 20\cos^3\theta \sin^3\theta + 6\cos\theta \sin^5\theta$$

Section - 'C'

निम्नांकित दीर्घ उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

Answer the following long-answer-type questions. (5x5=25)

प्रश्न 1. आव्यूह A को प्रसामान्य रूप में परिवर्तित कर आव्यूह की जाति ज्ञात कीजिए :

Transform the following Matrix A into Normal form & find their rank

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

OR

आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ के आइगेन मानों को ज्ञात कीजिए तथा संगत

आइगेन सदिशों का निर्धारण भी कीजिए ।

Find the the Eigen Values & their corresponding Eigen Vectors of the Matrix.