OR

दर्शाइये कि एक R-माड्यूल M के किन्ही दो उपमाड्यूलों का रैखिक योग भी M का एक उपमाड्यूल होता है।

Show that the linear sum of any two submodules of an R-module M is also a submodule.

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र R पर एक समतल के सभी सदिशों का समुच्चय सदिश योग और गुणन के सापेक्ष एक सदिश समष्टि होता है।

Prove that the set of all vectors in a plane is vector space with respect to addition and multiplication over the field R of real numbers.

OR

जाँच कीजिए कि सदिशों (2,3,1), (-1,4,-2) एवं (1,18,-4) का समुच्चय सदिश समष्टि $V_3(R)$ में रैखिकतः स्वतंत्र है या परतंत्र।

Examine whether the set of vectors (2,3,1), (-1,4,-2) and (1,18,-4) is linearly independent of dependent in $V_3(R)$.

प्रश्न 4. दर्शाइये कि किसी समाकारिता की अष्टि सदिश समष्टि V(F) की सदिश उपसमष्टि होती है।

Show that the kernel of a homomorphism is a subspace of vector space V(F).

OR

निम्नलिखित आव्यूह के आइगेन मानों और संगत आइगेन सदिशों का निर्धारण कीजिए :

Determine the eigen values and the corresponding eigen vectors of the following matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

प्रश्न 5. किसी आन्तर गुणन समष्टि V(F) में सिद्ध कीजिए कि :

Prove that in an inner product space: V(F)

(i) $(a\alpha - b\beta, \gamma) = a(\alpha, \gamma) - b(\beta, \gamma)$

(ii) $(\alpha, a\beta + b\gamma) = \bar{a}(\alpha, \beta) + \bar{b}(\alpha, \gamma)$

OR

माना कि W एक परिमित विमीय आन्तर गुणन समाष्टि V की कोई उपसमष्टि है तब दर्शाइये कि : $V = W \oplus W^{\perp}$

Let W be any subspace of a finite dimensional inner product space V, then show that : $V = W \oplus W^{\perp}$

---x---

Roll No......................

Total No. of Sections : 03

Total No. of Printed Pages : 04

Code No. : S-359

Annual Examination - 2018

B.Sc. Part - III

MATHEMATICS

Paper - II

ABSTRACT ALGEBRA

Max.Marks : 50

Time : 3 Hrs. Min.Marks : 17

टीप : खण्ड 'अ' में दस अतिलघूत्तरी प्रश्न हैं, जिन्हें हल करना अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघूत्तरी प्रश्न एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरी प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल करें।

Note : Section 'A', containing 10 very short-answer-type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short-answer-type questions and Section 'C' consists of long-answer-type questions. Section 'A' has to be solved first.

Section - 'A'

निम्नांकित अतिलघूत्तरी प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्यों में दें।

Answer the following very short-answer-type questions in one or two sentences. **(1x10=10)**

प्रश्न 1. उस समूह का नाम लिखिए जिसमें प्रत्येक समूह चक्रीय समूहों का सरल गुणनफल होता है।

Name the group in which every group is the direct product of cyclic groups.

प्रश्न 2. समूह G को केन्द्र को परिभाषित कीजिये।

Define Centre of a group G .

प्रश्न 3. सम्मिश्र संख्याओं का वलय (C,+, .) एक .... है।

The ring of complex numbers (C,+, .) is an ....

प्रश्न 4. वलय R पर बहुपद वलय $R[x]$ को परिभाषित कीजिये।

Define polynomial ring $R[x]$ over ring R.

प्रश्न 5. रैखिकतः स्वतंत्र समुच्चय के रूप में किसे परिभाषित किया जाता है?

What can be defined as linearly independent set?

प्रश्न 6. सदिश समष्टि को परिभाषित कीजिये।

Define vector space.

प्रश्न 7. समान क्षेत्र पर दो परिमित विमीय सदिश समष्टियाँ क्या होगी यदि और केवल यदि उनकी विमाएँ समान हो?

What will be the nature of two finite dimenional vector spaces over the same field if and only if they are of the same dimension?

प्रश्न 8. किस दशा में रैखिक प्रतिचित्रण $T:U \to V$ तुल्याकारिक होगा?

Under what condition, a linear transformation $T:U \to V$ is isomorphic?

प्रश्न 9. प्रत्येक आन्तर गुणन समष्टि किस प्रकार का सदिश समष्टि होता है?

Which type of vector space is every inner product space?

प्रश्न 10. प्रत्येक परिमित विमीय आन्तर गुणन समष्टि में क्या होता है?

What does every finite dimensional inner product space have?

Section - 'B'

निम्नांकित प्रश्नो के उत्तर दीजिये :–

Answer the following questions :- **(3x5=15)**

प्रश्न 1. एक समूह की स्वाकारिता को उदाहरण सहित समझाइये।

Explain Automorphism of a group with example.

OR

एक उपसमूह के प्रासामान्यक क्या हैं? समझाइये।

What is Normalizer of a subgroup? Explain.

प्रश्न 2. वलय–समाकारिता को स्पष्ट कीजिए।

Explain Ring Homomorphism.

OR

दर्शाइये कि उपमाड्यूलों का स्वेच्छ सर्वनिष्ठ एक उपमाड्यूल होता है।

Show that arbitrary intersection of submodules is a submodule.

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए किसी सदिश समष्टि V(F) की कोई दो उपसमष्टियों W_1 और W_2 का सर्वनिष्ट $W_1 \cap W_2$ भी V(F) की उपसमष्टि है।

Prove that. if W_1 and W_2 are two vector subspaces of a vector space V(F), then $W_1 \cap W_2$ is also a vector space of V(F).

OR

सिद्ध कीजिए कि सदिश समष्टि $V_3(R)$ में चार सदिशों $\alpha_1 = (1,2,3)$, $\alpha_2 = (1,0,0), \alpha_3 = (0,1,0)$ और $\alpha_4 = (0,0,1)$ का निकाय रैखिकतः परतंत्र है।

Prove that the four vectors $\alpha_1 = (1,2,3), \alpha_2 = (1,0,0), \alpha_3 = (0,1,0)$ and $\alpha_4 = (0,0,1)$ in $V_3(R)$ are linearly dependent.

प्रश्न 4. $T:V_3 \to V_1$ नियम $T(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ द्वारा परिभाषित कीजिए। यह एक रैखिक रूपान्तरण नही है।

Define $T:V_3 \to V_1$ by the rule

$$T(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

This is not a linear transformation.

OR

यदि λ किसी व्युत्क्रमणीय संकारक T का आइगेनमान है तो सिद्ध कीजिए कि λ^{-1} संकारक T^{-1} का आइगेन मान होगा।

If λ is an eigen value of an invertible transformation T, then show that λ^{-1} is an eigen value of T^{-1}.

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए कि सदिश समाष्टि V(R) पर आन्तर गुणन एक द्विएकघाती समघात है।

An inner product in a vector space V(R) is a bilinear form.

OR

$V_3(R)$ के निम्नलिखित सदिश को प्रासामान्यीकृत कीजिए $\propto = (2,3,-1)$.

Normalize the following vectors in $V_3(R)$: $\alpha = (2,3,-1)$.

Section - 'C'

निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिये :–

Answer the following questions :- **(5x5=25)**

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए कि एक अनन्त चक्रीय समूह के स्वाकारिता के समूह की कोटि 2 है।

Prove that the group of automorphism of an infinite cyclic group is of order 2.

OR

प्रथम सिलो प्रमेय लिखिये एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove first Sylow's theorem.

प्रश्न 2. यदि f वलय $(R,+,\cdot)$ से वलय $(R',+',\cdot')$ में एक समाकारिता है तो दर्शाइये कि

(1) f(o)= 0' जहाँ O और O' क्रमशः R और R' के शून्य अवयवों को निरूपित करते है।

(2) f(-a) = -f(a) $\forall$ a $\in$ R.

If f is a homomorphic from ring (R,+,.) onto ring $(R',+',\cdot')$ then show that

(1) f(o)= 0' where O end O' are the zero elements of R and R' respectively.

(2) f(-a) = -f(a) $\forall$ a $\in$ R.