Roll No......................

Total No. of Questions : 05

Total No. of Printed Pages : 07

Code No. : B-271(A)

Annual Examination - 2017

B.Sc.-III

MATHEMATICS

Paper-I

ANALYSIS

Max.Marks : 50

Time : 3 Hrs. **Min.Marks : 17**

टीप : प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान है।

Note : Attempt one question from each unit. All questions carry equal marks.

Unit-I

प्रश्न–1. (अ) निम्नलिखित फलन की फुरियर श्रेणी प्राप्त कीजिए :

$f(x)=x^2$ जहाँ $-\pi \le x \le \pi$ तथा $f(x+2\pi)=f(x)$

अतएव श्रेणी $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+----$ का मान प्राप्त कीजिए।

Find the Fourier series of the function :

$f(x)=x^2$, where $-\pi \le x \le \pi$ and $f(x+2\pi)=f(x)$. Hence find the sum of the series $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+----$.

(ब) स्वेच्छ पदों की श्रेणियों के अभिसरण के लिए आबेल परीक्षण का कथन लिखिए । इसकी सहायता से सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $1-\frac{1}{4.3}+\frac{1}{4^2.5}-\frac{1}{4^3.7}+\frac{1}{4^4.9}----$ अभिसारी है ।

Write Abel's test for convergence of arbitrary series. Using this test show that the series $1-\frac{1}{4.3}+\frac{1}{4^2.5}-\frac{1}{4^3.7}+\frac{1}{4^4.9}----$ is convergent.

(स) माना कि $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{जब } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{जब } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

तब परिभाषा से

$f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, $f_{xx}(0,0), f_{yy}(0,0)$ तथा $f_{xy}(0,0)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

Suppose that $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{when } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{when } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

then from definition, evaluate

$f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, $f_{xx}(0,0), f_{yy}(0,0)$ and $f_{xy}(0,0)$

Define continuity and uniform continuity of a function on a metric space (X,d). Show by an example, that every continuous function is not uniformly continuous.

(ब) मानलो (X,d) दूरीक समष्टि है तथा दूरीक $d_1 : X \times X \to R$ निम्नानुसार परिभाषित है : $d_1(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \forall x,y \in X$ तब दिखाइए कि दूरीक d_1 और d तुल्य-दूरीक हैं ।

Let (X,d) be a metric space and metric $d_1 : X \times X \to R$ is defined as follows : $d_1(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \forall x,y \in X$. Then show that metrices d_1 and d are the equivalent metrices.

(स) प्रत्येक संहत दूरीक समष्टि पूर्ण होती है, सिद्ध कीजिए ।

"Every compact metric space is complete". Prove.

---x---

(स) मानलो d वास्तविक संख्या समुच्चय R पर सामान्य दूरीक है तथा $A=[2, 3)$ और $B=(3, 5]$ तब निम्नांकित का मान ज्ञात कीजिए :

i) $\delta(A)$ ii) $\delta(B)$ iii) $d\left(\frac{5}{2}, A\right)$

iv) $D(A,B)$ v) $d(6,B)$

जहां δ व्यास, D समुच्चयों के मध्य दूरी है।

Let d be a usual metric on a set of real numbers R, and $A=[2, 3)$ and $B=(3, 5]$ then evaluate the following :

i) $\delta(A)$ ii) $\delta(B)$ iii) $d\left(\frac{5}{2}, A\right)$

iv) $D(A,B)$ v) $d(6,B)$

where δ is diameter and D is distance between sets.

Unit-V

प्रश्न-5. (अ) सांतत्य और एक समान सांतत्य फलन की परिभाषा, दूरीक समष्टि (X,d) के लिए दीजिए। एक उदाहरण से दिखाइए कि प्रत्येक संतत् फलन; एक समान संतत नहीं होता।

Unit-II

प्रश्न-2. (अ) फलन $f(x)=x^2, \forall\, x \in [0, a], a>0$ के लिए दर्शाइये कि $f \in R\,[0,a]$ तथा $\int_0^a x^2\,dx = a^3/3$.

For the function $f(x)=x^2, \forall\, x \in [0, a], a>0$ show that $f \in R\,[0,a]$ and $\int_0^a x^2\,dx = a^3/3$.

(ब) डिररूले परीक्षण का कथन लिखिए। समाकलन $\int_a^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ जहाँ $a>0$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

State the Dirichlet's test. Test the convergence of the integral $\int_a^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$, where $a>0$.

(स) फ्रुलैनी समाकलन के उपयोग से सिद्ध कीजिए कि :

Using Frullani's integral prove that :

$$\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} ax - \tan^{-1} bx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \log \frac{a}{b}$$

Unit-III

प्रश्न–3. (अ) संमिश्र फलन $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ के विश्लेषिक होने के लिए आवश्यक "कौशी–रीमान" आंशिक अवकलन समीकरण को लिखिए। इसे सिद्ध कीजिए।

State the necessary condition of "Cauchy-Riemann" partial differential equation for a function $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ to be analytic. Prove this condition.

(ब) एक द्विरेखीय रूपान्तरण ज्ञात कीजिए बिंदुओं $0,1,\infty$ को क्रमशः $1, i, -1$ पर प्रतिचित्रित करता है।

Find the bilinear transformation which maps the points $0,1,\infty$ to the point $1, i, -1$ respectively.

(स) द्विरेखीय रूपान्तरण $w=\dfrac{3z-4}{z-1}$ के स्थिर बिंदु और संगत प्रसामान्य रूप ज्ञात कीजिए।

Find the fixed point and corresponding normal form to the bilinear transformation $w=\dfrac{3z-4}{z-1}$.

Unit-IV

प्रश्न–4. (अ) दूरीक समष्टि की परिभाषा लिखिए। एक दूरीक समष्टि में सिद्ध कीजिए कि $|d(x,z)-d(y,z)|\le d(x,y), \forall\, x,y\in(X,d)$.

Define metric space. In a metric space (X,d)

Prove that : $|d(x,z)-d(y,z)|\le d(x,y), \forall\, x,y\in(X,d)$

(ब) समष्टि l^{∞} सभी परिबद्ध वास्तविक अनुक्रमों का समुच्चय है। मानलो $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ इसके दो स्वेच्छ बिंदु हैं जिसमें दूरीक निम्नानुसार परिभाषित है–

$$d(x,y)=\sup\{|x_n-y_n| : n\in N\}, \forall\, x,y\in l^{\infty}$$

तो दिखाइए कि (l^{∞},d) एक दूरीक समष्टि है।

Space l^{∞} is a set of all bounded real number's sequences. Suppose $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y=\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ are two arbitary sequences points, in which the metric is defined as follows:

$d(x,y)=\sup\{|x_n-y_n| : n\in N\}, \forall\, x,y\in l^{\infty}$. Then show that (l^{∞},d) is a metric space.