Roll No.....................

Total No. of Questions : 03
Total No. of Printed Pages : 05

Code No. : B-272(A)

Annual Examination - 2017

B.Sc.-III

MATHEMATICS

Paper-II

ABSTRACT ALGEBRA

Max.Marks : 50

Time : 3 Hrs. Min.Marks : 17

टीप : प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान है।

Note : Attempt one question from each unit. All questions carry equal marks.

Unit-I

प्रश्न–1. (अ) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह δ के सभी आंतरिक स्वकारिताओं का समुच्चय $In(\delta), Aut(\delta)$ का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है और यह δ के विभाग समूह δ/z से तुल्याकारी होता है, जहाँ z, δ का केन्द्र है।

Prove that the set $In(\delta)$ of all inner automorphism of a group δ is a normal subgroup of $Aut(\delta)$ and is isomorphic to the quotinet group δ/z of δ where z is the centre of δ.

P.T.O.

(ब) मानलो δ एक परिमित समूह है। δ में a के संयुग्मी अवयवों की संख्या δ में a के प्रसामान्यक का सूचक होता है अर्थात

$$C_a = \frac{o(\delta)}{o(N(a))}$$

Let δ be a finite group, The numbe of elements conjugate to a in δ is the index of the normalizer of a in δ ie. $C_a = \frac{o(\delta)}{o(N(a))}$

(स) द्वितीय सिलो प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove second Sylow's theorem.

Unit-II

प्रश्न-2. (अ) सिद्ध कीजिए कि किसी वलय R की दो गुणजावलियों का सर्वनिष्ठ R की एक गुणजावली होता है।

Prove that the intersection of two idelas of any ring R is an ideal of R.

(ब) सिद्ध कीजिए कि R एक ऐसा तत्समकी क्रम-विनिमेय वलय है जिसके गुणजावली (0) या स्वयं R हो तो R एक क्षेत्र है।

If R is such a commutative ring with unity whose ideal is (0) on R itself then prove that R is a field.

(स) मानलो $f: M \to N$ एक R-माड्यूल M अंतक्षेपी एक R-माड्यूल N की एक R-समाकारिता है, तो $kert, M$ का एक R-उपमाड्यूल होता है।

Unit-V

प्रश्न-5. (अ) श्वार्ज असमिका लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Schwarz's Inequality.

(ब) सिद्ध कीजिए कि एक आन्तर गुणन समष्टि V में शून्येत्तर सदिशों का कोई लाम्बिक समुच्चय रैखिकतः स्वतंत्र होता है।

Prove that any orthogonal set of non-zero vectors in an inner produced space V is linearly independent.

(स) ग्राम-श्मिट के लाम्बिक प्रक्रम का उपयोग करके $V_3(R)$ आधार $B=\{\alpha, \beta, \gamma\}$ से एक प्रसामान्य लाम्बिक आधार प्राप्त कीजिए जहाँ $\alpha=(1,0,0), \beta=(1,1,0) \gamma=(1,1,1)$.

Using Gram-Schmidt orthogonalization process obtain an orthonormal basis from the basis $B=\{\alpha, \beta, \gamma\}$ of $V_3(R)$ where $\alpha=(1,0,0)$, $\beta=(1,1,0) \gamma=(1,1,1)$

---x---

Let $f: M \to N$ be an $R-$homorphism of an $R-$module M into an $R-$module N, then the kert is an $R-$submodule of M.

Unit-III

प्रश्न–3. (अ) सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि $V(F)$ के एक अरिक्त उपसमुच्चय W के लिए V का एक उपसमिष्ट होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध है :

i) $\alpha \in w,\ \beta \in w \Rightarrow \alpha - \beta \in w$

ii) $\alpha \in w, a \in F \Rightarrow a\alpha \in w$

Prove that the necessary and sufficient conditions for a non-empty subset w of a vector space $V(F)$ to be a subspace of V are

i) $\alpha \in w,\ \beta \in w \Rightarrow \alpha - \beta \in w$

ii) $\alpha \in w, a \in F \Rightarrow a\alpha \in w$

(ब) सिद्ध कीजिए कि सदिश $\alpha = (1, 0, -1)$, $\beta = (1, 2, 1)$ तथा $\gamma = (0, -3, 2)$ $V_3(R)$ का आधार बनाते हैं।

Prove that the vectors $\alpha = (1, 0, -1)$, $\beta = (1, 2, 1)$ and $\gamma = (0, -3, 2)$ $V_3(R)$ form a basis of $V_3(R)$

(स) यदि w एक परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ का एक उपसमष्टि है तो $\dim \frac{V}{w} = \dim V - \dim w$

(3) **Code No. : B-272(A)**

Let $f: M \to N$ be an $R-$homorphism of an $R-$module M into an $R-$module N, then the kert is an $R-$submodule of M.

Unit-III

प्रश्न–3. (अ) सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि $V(F)$ के एक अरिक्त उपसमुच्चय W के लिए V का एक उपसमिष्ट होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध है :

i) $\alpha \in w,\ \beta \in w \Rightarrow \alpha - \beta \in w$

ii) $\alpha \in w, a \in F \Rightarrow a\alpha \in w$

Prove that the necessary and sufficient conditions for a non-empty subset w of a vector space $V(F)$ to be a subspace of V are

i) $\alpha \in w,\ \beta \in w \Rightarrow \alpha - \beta \in w$

ii) $\alpha \in w, a \in F \Rightarrow a\alpha \in w$

(ब) सिद्ध कीजिए कि सदिश $\alpha = (1, 0, -1)$, $\beta = (1, 2, 1)$ तथा $\gamma = (0, -3, 2)$ $V_3(R)$ का आधार बनाते हैं।

Prove that the vectors $\alpha = (1, 0, -1)$, $\beta = (1, 2, 1)$ and $\gamma = (0, -3, 2)$ $V_3(R)$ form a basis of $V_3(R)$

(स) यदि w एक परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ का एक उपसमष्टि है तो $\dim \frac{V}{w} = \dim V - \dim w$

It w is a subspace of a finite dimensional vector space $V(F)$ then $\dim \frac{V}{w} = \dim V - \dim w$

Unit-IV

प्रश्न–4. (अ) यदि $f: V_3(F) \to V_2(F)$ निम्न प्रकार से परिभाषित है $f(x,y,z) = (y,z)$ तो दिखाइए कि f एक रैखिक रुपांतरण है।

If $f: V_3(F) \to V_2(F)$ is defined as $f(x,y,z) = (y,z)$ then show that f, is linear transformation.

(ब) दर्शाइये कि मेट्रिक्स विकर्णीय है :

Show that the matrix A is diagonalizable :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(स) निम्न द्विघाती समघात को विहित रुप में व्यक्त कीजिए तथा उसकी जाति, सूचकांक एवं चिन्हिका ज्ञात कीजिए।

Redue the following quadratic form in into cononical form and find its rank, index and signature.

$$q = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 4yz + 6zx$$

(4) Code No. : B-272(A)

It w is a subspace of a finite dimensional vector space $V(F)$ then $\dim \frac{V}{w} = \dim V - \dim w$

Unit-IV

प्रश्न–4. (अ) यदि $f: V_3(F) \to V_2(F)$ निम्न प्रकार से परिभाषित है $f(x,y,z) = (y,z)$ तो दिखाइए कि f एक रैखिक रुपांतरण है।

If $f: V_3(F) \to V_2(F)$ is defined as $f(x,y,z) = (y,z)$ then show that f, is linear transformation.

(ब) दर्शाइये कि मेट्रिक्स विकर्णीय है :

Show that the matrix A is diagonalizable :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(स) निम्न द्विघाती समघात को विहित रुप में व्यक्त कीजिए तथा उसकी जाति, सूचकांक एवं चिन्हिका ज्ञात कीजिए।

Redue the following quadratic form in into cononical form and find its rank, index and signature.

$$q = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 4yz + 6zx$$