

Code No. : A.B.S-258

Roll No.

Total No. of Sections : 3

Total No. of Printed Pages : 9

Annual Online Examination 2021

Code No. : A.B.S-258
B.Sc. Part II

MATHEMATICS

Paper I

[Advanced Calculus]

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 50

नोट : खण्ड 'अ' अतिलघु उत्तरीय प्रकार का, जिसमें दस प्रश्न हैं, अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघु उत्तरीय प्रकार के प्रश्न हैं एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल किया जाना है।

Note : Section 'A' containing 10 very short answer type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short answer type questions and Section 'C' consists of long answer type questions. Section 'A' has to be solved first.

खण्ड 'अ'

Section 'A'

निम्नांकित अतिलघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्यों में दें।

Answer the following very short answer type questions in one or two sentences. $1 \times 10 = 10$

1. उच्चतः परिबद्ध अनुक्रम की परिभाषा लिखिए।

Write definition of bounded above sequence.

2. राबी परीक्षण का कथन लिखिए।

Write statement of Raabe's test.

3. सातत्य के लिए कौशी की परिभाषा लिखिए।

Write Cauchy's definition of continuity.

4. टेलर प्रमेय (कौशी रूप के अवशेष सहित) का कथन लिखिए।

Write statement of Taylor's theorem (Cauchy's form of Remainder).

5. समघात फलनों पर आयलर प्रमेय का कथन लिखिए।

Write statement of Euler's theorem on homogeneous functions.

6. निम्न रूपान्तरण का जैकोबियन ज्ञात कीजिए—

$$u = ax + by, v = cx + dy.$$

If $u = ax + by, v = cx + dy$, then find the Jacobian.

7. केन्द्रज की परिभाषा लिखिए।

Write definition of Evolute.

8. स्थानीय उच्चिष्ठ की परिभाषा लिखिए।

Write definition of local maximum.

9. बीटा और गामा फलन के बीच सम्बन्ध लिखिए।

Write relation between Beta and Gamma function.

10. $\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

खण्ड 'ब'
Section 'B'

निम्नांकित लघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर 150-200 शब्द सीमा में दें।

Answer the following short answer type questions with word limit 150-200. $3 \times 5 = 15$

1. सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$ 2 को अभिसारी है।

Prove that the sequence $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$ converges to 2.

अथवा
Or

दर्शाइए कि निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेणी अभिसारी है—

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

Show that the following geometric series is convergent :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

2. सिद्ध कीजिए कि x के सभी परिमित मानों के लिए $\sin^2 x$ संतत है।

Show that $\sin^2 x$ is continuous for all finite values of x .

अथवा
Or

फलन $f(x) = \sqrt{(x^2 - 4)}$ के लिए अन्तराल $[2, 4]$ में लाग्रान्ज के मध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

Verify Lagrangian's mean value theorem for the function $f(x) = \sqrt{(x^2 - 4)}$ the interval $[2, 4]$.

3. यदि $u = \log\left(\frac{x^4 + y^4}{x + y}\right)$, तो सिद्ध कीजिए कि

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3.$$

If $u = \log\left(\frac{x^4 + y^4}{x + y}\right)$, then prove that $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3$.

अथवा
Or

समीकरण $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$ में स्वतन्त्र चर x को, z में परिवर्तित कीजिए, जहाँ $x = e^z$.

Code No. : A.B.S-258

Change the equation $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$ in independent variable x into z , where $x = e^z$.

4. सरल रेखाओं के कुल $y = mx + am^p$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिए।

Find the envelope of the family of straight lines $y = mx + am^p$.

अथवा

Or

फलन $u = x^3y^2 (1 - x - y)$ के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

Discuss the maximum or minimum value of function $u = x^3y^2 (1 - x - y)$.

5. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \times \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} dx = \pi$.

Prove that $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \times \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} dx = \pi$.

अथवा

Or

मान ज्ञात कीजिए—

$$\int_0^3 \int_1^2 xy (1 + x + y) dx dy.$$

[5]

P. T. O.

Code No. : A.B.S-258

Find the value :

$$\int_0^3 \int_1^2 xy (1 + x + y) dx dy.$$

खण्ड 'स'

Section 'C'

निम्नांकित दीर्घ उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर 300-350 शब्द सीमा में दें।

Answer the following long answer type questions with word limit 300-350. 5×5=25

1. क्या अनन्त श्रेणी $2 + \frac{3x^2}{8} + \frac{4x^3}{27} + \dots + \frac{(n+1)x^n}{n^3} + \dots$ $n > 0$ अभिसारी या अपसारी है?

Is the infinite series $2 + \frac{3x^2}{8} + \frac{4x^3}{27} + \dots + \frac{(n+1)x^n}{n^3} + \dots$ $n > 0$ convergent or divergent ?

अथवा

Or

श्रेणी $1 + \frac{x}{2} + \frac{12}{3^2}x^2 + \frac{13}{4^3}x^3 + \dots$ का अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए।

Test the convergency of the series $1 + \frac{x}{2} + \frac{12}{3^2}x^2 + \frac{13}{4^3}x^3 + \dots$.

[6]

Code No. : A.B.S-258

2. कौशी का मध्यमान प्रमेय लिखकर सिद्ध कीजिए।

State and prove the Cauchy's mean value theorem.

अथवा

Or

दर्शाइए कि फलन f जो $f(x) = x^3$ द्वारा परिभाषित है, अंतराल $[-2, 2]$ में एकसमान संतत है।

Show that the function f defined by $f(x) = x^3$ is uniformly continuous in $[-2, 2]$.

3. $\sin xy$ का $(x-1)$ तथा $\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$ की घातों में द्वितीय पथों तक प्रसार कीजिए।

Expand $\sin xy$ in powers of $(x-1)$ and $\left(y - \frac{\pi}{2}\right)$ upto second degree terms.

अथवा

Or

यदि $u^3 = xyz$, $\frac{1}{V} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, $w^2 = x^2 + y^2 + z^2$ तो

दर्शाइए कि $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{V(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)}{3u^2w(yz+zx+xy)}$.

[7]

P. T. O.

Code No. : A.B.S-258

If $u^3 = xyz$, $\frac{1}{V} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, $w^2 = x^2 + y^2 + z^2$, then

show that $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{V(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)}{3u^2w(yz+zx+xy)}$.

4. परवलय $y^2 = 4ax$ का केन्द्रज का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the evaluate of the parabola $y^2 = 4ax$.

अथवा

Or

एक समतल त्रिभुज में, $u = \cos A \cos B \cos C$ का उच्चिष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

In a plane triangle, find the maximum value of $u = \cos A \cos B \cos C$.

5. दिखाइए कि $\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)\dots\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{n^{1/2}}$ जहाँ n एक से बड़ा पूर्णांक है।

To prove that $\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)\dots\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{(n-1)/2}}{n^{1/2}}$ where n is positive integer greater than 1.

[8]

Code No. : A.B.S-258

अथवा

Or

निम्नलिखित समाकल में समाकल का क्रम बदलिए—

$$\int_0^a \int_{x^2/a}^{2a-x} f(x, y) dx dy.$$

Change the order of integration in the following integral :

$$\int_0^a \int_{x^2/a}^{2a-x} f(x, y) dx dy.$$

□□□□□ d □□□□□