

Code No. : A.B.S-259

Roll No. ....

Total No. of Sections : 3

Total No. of Printed Pages : 10

## Annual Online Examination 2021

Code No. : A.B.S-259

B.Sc. Part II

MATHEMATICS

Paper II

[Differential Equations]

Time : Three Hours ]

[ Maximum Marks : 50

**नोट :** खण्ड 'अ' अतिलघु उत्तरीय प्रकार का, जिसमें दस प्रश्न हैं, अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघु उत्तरीय प्रकार के प्रश्न हैं एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल किया जाना है।

**Note :** Section 'A' containing 10 very short answer type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short answer type questions and Section 'C' consists of long answer type questions. Section 'A' has to be solved first.

खण्ड 'अ'

Section 'A'

निम्नांकित अतिलघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्यों में दें।

Answer the following very short answer type questions in one or two sentences. **1×10=10**

1. स्टर्म लियोविली समस्या से आप क्या समझते हैं?

What do you mean by Sturm Liouville problem ?

2.  $Q_n(x)$  व  $P_n(x)$  के रॉक्सियन का मान क्या होता है?

What is the value of Wronskian of  $Q_n(x)$  and  $P_n(x)$  ?

3. समाकल समीकरण से आप क्या समझते हैं?

What do you mean by integral equation ?

4. संवलन प्रमेय लिखिए।

State convolution theorem.

5. आंशिक अवकल समीकरण  $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0$  का मान

ज्ञात कीजिए।

Write the order of partial differential equation

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0.$$

6. पूर्ण समाकल से आप क्या समझते हैं?

What do you mean by complete integral ?

7.  $x$  व  $y$  के किस प्रतिस्थापन के द्वारा समीकरण

$$A_0 x^n \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + A_1 x^{n-1} y \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1} \partial y} + \dots + A_n y^n \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = f(x, y)$$

को अचर गुणांकों के रैखिक समीकरण में परिवर्तित किया जा सकता है?

By which substitution of  $x$  and  $y$  equation

$$A_0 x^n \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + A_1 x^{n-1} y \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1} \partial y} + \dots + A_n y^n \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = f(x, y)$$

Code No. : A.B.S-259

can be converted to linear equation with constant coefficients ?

8. आंशिक अवकल समीकरण को वर्गीकृत कीजिए—

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Classify partial differential equation :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

9. जैकोबी समीकरण लिखिए।

Write Jacobi equation.

10. चरम मान से आप क्या समझते हैं?

What do you mean by extremals ?

खण्ड 'ब'

Section 'B'

निम्नांकित लघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर 150-200 शब्द सीमा में दें।

Answer the following short answer type questions with word limit 150-200.  $3 \times 5 = 15$

1. हल कीजिए—

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^4} - \frac{3p}{p^2 + 16} + \frac{5}{p^2 + 4} \right\}.$$

[ 3 ]

P. T. O.

Code No. : A.B.S-259

Solve :

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^4} - \frac{3p}{p^2 + 16} + \frac{5}{p^2 + 4} \right\}.$$

अथवा

Or

हल कीजिए—

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt.$$

Solve :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt.$$

2. हल कीजिए—

$$z = p^2 + q^2.$$

Solve :

$$z = p^2 + q^2.$$

अथवा

Or

हल कीजिए—

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = xyz.$$

[ 4 ]

Code No. : A.B.S-259

Solve :

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = xyz.$$

3. हल कीजिए—

$$(D^2 - DD' - 6D')^2 z = xy.$$

Solve :

$$(D^2 - DD' - 6D')^2 z = xy.$$

अथवा

Or

हल कीजिए—

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x - y.$$

Solve :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x - y.$$

4. समीकरण  $(1-x) \frac{dy}{dx} = y$  को घात श्रेणी विधि से हल कीजिए।

Solve  $(1-x) \frac{dy}{dx} = y$  by power series method.

Code No. : A.B.S-259

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए—

$$(n+1) P_{n+1} = (2n+1) xP_n - nP_{n-1}.$$

Prove that :

$$(n+1) P_{n+1} = (2n+1) xP_n - nP_{n-1}.$$

5. सिद्ध कीजिए कि फलनक  $I[y(x)] = \int \sqrt{x(1+y^2)} dx$  का चरम मान परवलय होता है।

Prove that the extremals of the functional  $I[y(x)] = \int \sqrt{x(1+y^2)} dx$  are parabolas.

अथवा

Or

दो बिन्दुओं  $(x_1, y_1)$  व  $(x_2, y_2)$  को मिलाने वाला सबसे छोटा वक्र ज्ञात कीजिए।

Find the shortest curve joining two points  $(x_1, y_1)$  and  $(x_2, y_2)$ .

खण्ड 'स'  
Section 'C'

निम्नांकित दीर्घ उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर 300-350 शब्द सीमा में दें।

Code No. : A.B.S-259

Answer the following long answer type questions  
with word limit 300-350.  $5 \times 5 = 25$

1. हल कीजिए,  $(D^4 + 2D^2 + 1)y = 0$ , जब  $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2, y'''(0) = -3$ .

Solve  $(D^4 + 2D^2 + 1)y = 0$ , when  $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2, y'''(0) = -3$ .

अथवा

Or

हल कीजिए,  $\frac{\partial y}{\partial x} = 2 \frac{\partial y}{\partial t} + y, y(x, 0) = 6e^{-3x}$  तथा  
 $y(x, t)$  परिबद्ध है,  $x > 0, y > 0$  के लिए।

Solve  $\frac{\partial y}{\partial x} = 2 \frac{\partial y}{\partial t} + y, y(x, 0) = 6e^{-3x}$  and  $y(x, t)$  is  
bounded for  $x > 0, t > 0$ .

2. चारपिट विधि से हल कीजिए—

$$p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 1 = 0.$$

Solve by Charpit's method :

$$p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 1 = 0.$$

Code No. : A.B.S-259

अथवा

Or

$q - p + x - y = 0$  का पूर्ण, विचित्र और व्यापक हल ज्ञात  
कीजिए।

Find the complete, singular and general solution of  
 $q - p + x - y = 0$ .

3. मोंजे विधि से हल कीजिए—

$$r = a^2t.$$

Solve by Monge's method :

$$r = a^2t.$$

अथवा

Or

हल कीजिए—

$$(D^2 + 2DD' + D'^2)z = 2 \cos y - x \sin y.$$

Solve :

$$(D^2 + 2DD' + D'^2)z = 2 \cos y - x \sin y.$$

4. समीकरण  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + x^2y = 0, 0 < x < \infty$  का श्रेणी  
हल फ्रोबेनियस विधि से ज्ञात कीजिए।

Code No. : A.B.S-259

Find the series solution of equation  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + x^2y = 0$ ,  $0 < x < \infty$  by Frobenius method.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि  $y = A J_n(x) \int_0^x \frac{dx}{x J_n^2(x)} + B J_n(x)$  बेसल

समीकरण का पूर्ण हल है।

Prove that  $y = A J_n(x) \int_0^x \frac{dx}{x J_n^2(x)} + B J_n(x)$  is

complete solution of Bessel's equation.

5. सिद्ध कीजिए कि फलनक  $I = \int_0^{\pi/4} (y''^2 - y^2 + x^2) dx$  को

प्रतिबन्धों  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  के

अधीन चरम मान प्राप्त करता है, वह  $y = \sin x$  के दिया जाता है।

Prove that the curve which extremizes the functional

$I = \int_0^{\pi/4} (y''^2 - y^2 + x^2) dx$  under the conditions  $y(0)$

$= 0$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  is  $y = \sin x$ .

Code No. : A.B.S-259

अथवा

Or

फलनक  $I [y(x)] = \int_0^{\log 2} (e^{-x} y'^2 - e^x y^2) dx$  के लिए चरम ज्ञात करने की समस्या में निर्देशांक रूपान्तरण के अन्तर्गत आयलर समीकरण की निश्चरता का सत्यापन कीजिए।

Verify invariance of Euler's equation under coordinates transformations in the problem of finding the extremals of the functional  $I [y(x)] = \int_0^{\log 2} (e^{-x} y'^2 - e^x y^2) dx$ .

□ □ □ □ □ d □ □ □ □ □