Roll No. ..... Total No. of Sections : 3

Total No. of Printed Pages : 9

Annual Online Examination 2021

Code No. : A.B.S-358

B.Sc. Part III

MATHEMATICS

Paper I

[Analysis]

Time : Three Hours] [Maximum Marks : 50

नोट : *खण्ड 'अ' अतिलघु उत्तरीय प्रकार का, जिसमें दस प्रश्न हैं, अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघु उत्तरीय प्रकार के प्रश्न हैं एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल किया जाना है।*

Note : *Section 'A' containing 10 very short answer type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short answer type questions and Section 'C' consists of long answer type questions. Section 'A' has to be solved first.*

खण्ड 'अ''

Section 'A'

निम्नांकित अतिलघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्यों में दें।

Answer the following very short answer type questions in one or two sentences. **1×10=10**

1. *दो चरों के फलनों की अवकलनीयता का सूत्र लिखिए।*

Write the formula of differentiability of functions of two variables.

2. *अस्पष्ट फलन का उदाहरण दीजिए।*

Give an example of implicit function.

3. *उपरि रीमान समाकल का सूत्र लिखिए।*

Write the formula of upper Riemann integral.

4. *समाकल के निरपेक्ष अभिसरण को परिभाषित कीजिए।*

Define absolute convergence of integrals.

5. *इस वृत्त का समीकरण लिखिए जिसका केन्द्र a और त्रिज्या r है।*

Write equation of the circles with centre a and radius r.

6. *फलन $f(z)$ के विश्लेषिक होने के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध लिखिए।*

Write the necessary condition for $f(z)$ to be analytic.

7. *विवृत्त गोलक को परिभाषित कीजिए।*

Define open sphere.

8. *बनाख स्थिर बिन्दु प्रमेय लिखिए।*

Write Banach fixed point theorem.

9. *दूरिक समष्टि में एक समान सांतत्यता को परिभाषित कीजिए।*

Define uniform continuity in metric spaces.

10. *पृथक्कृत समुच्चय का उदाहरण दीजिए।*

Give example of separated sets.

खण्ड 'ब'
Section 'B'

निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दें।

Solve the following questions. **3×5=15**

1. *श्रेणियों के कॉशी के मूल परीक्षण में अभिसरण को समझाइए।*

Explain convergence of series by Cauchy's root test.

अथवा

Or

यदि $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2$ *हो, तो* $f_y(1, 2)$ *और* $f_x(1, 2)$ *ज्ञात कीजिए।*

If $f(x, y) = 2x^2 - xy + 2y^2$, then find $f_y(1, 2)$ and $f_x(1, 2)$.

2. *दर्शाइए कि समाकल* $\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ *अभिसारी है।*

Show that the integral $\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ is convergent.

अथवा

Or

दर्शाइए कि समाकल $\int_0^\infty e^{-x} \cos tx\, dx, R$ *पर एक समान अभिसरित होती है।*

Show that the integral $\int_0^\infty e^{-x} \cos tx\, dx$ converges uniformly in R.

3. *दर्शाइए कि फलन* $u = x^3 - 3xy^2$ *हार्मोनिक है तथा संगत विश्लेषिक फलन को ज्ञात कीजिए, जिसका कि यह वास्तविक भाग है।*

Show that the function $u = x^3 - 3xy^2$ is harmonic. Find corresponding analytic function whose real part is this function.

अथवा

Or

द्विरैखिक रूपान्तरण $\omega = \frac{z}{2 - z}$ *के स्थिर बिन्दु ज्ञात कीजिए।*

Find fixed point of the bilinear transformation $\omega = \frac{z}{2 - z}$.

4. *दर्शाइए कि* $\sqrt{2}$ *परिमेय संख्या नहीं है।*

Show that $\sqrt{2}$ is not rational number.

अथवा

Or

यदि $A = [2, 3)$ *और* $B = (3, 5]$ *है, तो* $D\left(\frac{5}{2}, A\right)$ *तथा* $D\left(\frac{7}{2}, B\right)$ *ज्ञात कीजिए।*

If $A = [2, 3)$ and $B = (3, 5]$, then find $D\left(\frac{5}{2}, A\right)$ and $D\left(\frac{7}{2}, B\right)$.

5. *मान लीजिए* (X, d) *तथा* (Y, ρ) *दो दूरिक समष्टियाँ हैं तथा* $f : X \to Y$ *एक संतत फलन है। सिद्ध कीजिए कि यदि* f *एकैकी-आच्छादक है और* X *संहत है, तब* f^{-1} *भी संतत है।*

Let (X, d) and (Y, ρ) are two metric spaces and $f : X \to Y$ is a continuous function. If f is one-one onto and X is compact, then prove that f^{-1} is also continuous.

अथवा

Or

मान लीजिए (X, d) *एक दूरीक समष्टि है। यदि* (X, d) *असम्बद्ध है तो सिद्ध कीजिए* X *दो विसंघीय, अरिक्त संवृत्त समुच्चयों के संघ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।*

Let (X, d) be a metric space. If (X, d) is disconnected, then prove that X can be expressed as union of two disjoint non-empty closed sets.

खण्ड 'स'
Section 'C'

निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
Solve the following questions. **5×5=25**

1. *दर्शाइए कि श्रेणी* $1 - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.5^2} - \frac{1}{7.5^3} + \ldots$ *अभिसरित होती है।*

Show that the series $1 - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.5^2} - \frac{1}{7.5^3} + \ldots$ is convergent.

अथवा

Or

अन्तराल $-\pi < x < \pi$ *में फलन* $f(x) = x + x^2$ *का फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए। अतः दर्शाइए कि*

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

Find Fourier series of function $f(x) = x + x^2$ in $-\pi < x < \pi$. Hence deduce that

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

2. *यदि* $f(x) = x \; \forall \; x \in [0, 1]$ *में परिभाषित है, तो* $[0, 1]$ *को* n*-बराबर भागों में विच्छेदन करके दर्शाइए कि* $f \in R\,[0, 1]$ *तथा* $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$ *।*

If $f(x) = x \; \forall \; x \in [0, 1]$ is defined in $[0, 1]$, then divide the interval in n equal parts and show that $f \in R\,[0, 1]$ and $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

अथवा

Or

दर्शाइए कि $\int_0^{\pi/2} \log \sin x\,dx$ *अभिसारी है।*

Show that $\int_0^{\pi/2} \log \sin x\,dx$ is convergent.

3. *दर्शाइए कि रूपान्तरण* $w = i\frac{1-z}{1+z}$ *वृत्त* $|z| = 1$ *को* w*-समतल में वास्तविक अक्ष पर और वृत्त के आन्तरिक भाग* $|z| < 1$ *को* w*-समतल के ऊपरी अर्धभाग में रूपान्तरित करता है।*

Show that the transformation $w = i\frac{1-z}{1+z}$ transforms the circle $|z| = 1$ into real axis of w-plane and interior part of the circle $|z| < 1$ into upper half part of w-plane.

अथवा

Or

दिखाइए कि रूपान्तर $w = z^2$ *समतल में वृत्तों* $|z - a| = c$ *(*a, c *वास्तविक है) को संगत* w *समतल में मंथरक में रूपान्तरित करता है।*

Show that the transformation $w = z^2$ transforms circles $|z - a| = c$ (a, c are real) into limcon at corresponding w-plane.

4. *सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि में परिमित संख्या में विवृत्त समुच्चयों का सर्वनिष्ठ विवृत्त होता है।*

Prove that in a metric space, the intersection of a finite number of open sets is open.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि किन्हीं दो भिन्न वास्तविक संख्याओं के मध्य कम से कम एक परिमेय संख्या होती है।

Prove that there is atleast one rational number lies between two different real numbers.

5. *विस्तार प्रमेय लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।*

State and prove the Extension theorem.

अथवा

Or

मान लीजिए (X, d) *तथा* (Y, ρ) *दो दूरिक समष्टियाँ हैं तथा* $f : X \to Y$ *एक फलन है। सिद्ध कीजिए कि* f *एक बिन्दु* $x_0 \in X$ *पर संतत है और* X *में कोई अनुक्रम* $\{x_n\}$, x_0 *पर अभिसरित होता है, यदि और केवल यदि* $\{f(x_n)\}$, $f(x_0)$ *पर अभिसरित होता है।*

Let (X, d) and (Y, ρ) be two metric spaces and $f : X \to Y$ is a mapping. Prove that f is continuous at point $x_0 \in X$ and every sequence $\{x_n\}$ in X converges to x_0 if and only if $\{f(x_n)\}$ converges to $f(x_0)$.

❐ ❐ ❐ ❐ ❐ d ❐ ❐ ❐ ❐ ❐