

Roll No.

Total No. of Sections : 3

Total No. of Printed Pages : 10

Code No. : BS-158

Online Annual Examination, 2022

B.Sc. Part I

MATHEMATICS

Paper I

[Algebra and Trigonometry]

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 50

नोट : खण्ड 'अ' अति लघु उत्तरीय प्रकार का, जिसमें दस प्रश्न हैं, अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघु उत्तरीय प्रकार के प्रश्न हैं एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल किया जाना है।

Note : Section 'A', containing 10 very short answer type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short answer type questions and Section 'C' consists of long answer type questions. Section 'A' has to be solved first.

खण्ड 'अ'

Section 'A'

निम्नांकित अति लघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्यों में दीजिए।

Code No. : BS-158

Answer the following very short answer type questions in one or two sentences. 1×10=10

1. आव्यूह का परिवर्त को परिभाषित कीजिए।

Define transpose of a matrix.

2. कैले-हेमिल्टन प्रमेय का कथन लिखिए।

Write the statement of Cayley-Hamilton theorem.

3. संगतता के लिये प्रतिबंध प्रमेय लिखिए।

Write the theorem of condition for consistency.

4. व्यापक रूप में रूपान्तरण की व्याख्या कीजिए।

Explain transformation in general.

5. क्रमित-युग्म को परिभाषित कीजिए।

Define of an ordered pair.

6. दक्षिण सह-समुच्चय एवं वाम सह-समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

Define right coset and left coset.

7. समूहों की तुल्यकारिता को परिभाषित कीजिए।

Define isomorphism of groups.

8. तत्समक सहित वलय को परिभाषित कीजिए।

Define ring with unity.

Code No. : BS-158

9. अतिपरवलयिक फलन को परिभाषित कीजिए।

Define hyperbolic functions.

10. वास्तविक संख्या का लघुगणक को परिभाषित कीजिए।

Define logarithm of the real number.

खण्ड 'ब'

Section 'B'

निम्नांकित लघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Answer the following short answer type questions.

3×5=15

1. दर्शाइये कि R^2 का उपसमुच्चय $\{(1, 0), (1, 1)\}$ रैखिकतः स्वतन्त्र है।

Show that the set $\{(1, 0), (1, 1)\}$ of R^2 is linearly independent.

अथवा

Or

किसी व्युत्क्रमणीय आव्यूह की जाति उसके व्युत्क्रम की जाति के बराबर होती है।

The rank of non-singular matrix is equal to the rank of its inverse.

[3]

P. T. O.

Code No. : BS-158

2. भागफल और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जब $x^5 + 2x^2 - x + 4$ को $x + 2$ से भाग दिया जाता है।

Find the quotient and remainder when the polynomial $x^5 + 2x^2 - x + 4$ is divided by $x + 2$.

अथवा

Or

यदि $X = \{-1, 1\}$ और $f(x) = x^3$ और $f: X \rightarrow X$ है, तो सिद्ध कीजिए कि एक एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण होगा।

If $X = \{-1, 1\}$ and $f(x) = x^3$ and $f: X \rightarrow X$, then prove that f is one-one onto mapping.

3. किसी समूह के दो अवयवों के गुणनफल का प्रतिलोम उनके प्रतिलोमों का उल्टेक्रम में गुणनफल के बराबर होता है, अर्थात् $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \forall a, b \in G$.

The inverse of the product of two elements of a group is the product of the inverses taken in the reverse order i.e., $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \forall a, b \in G$.

अथवा

Or

5 प्रतिकों 1, 2, 3, 4, 5 के सममित समूह S_5 में निम्न को सिद्ध कीजिए :

(i) $(1, 2, 3)(3, 1, 2, 4) = (1, 4, 3, 2)$

(ii) $(1, 2, 3)(4, 5) = (4, 5)(1, 2, 3)$

[4]

Code No. : BS-158

Prove the following in the symmetric group S_5 of 5 symbols 1, 2, 3, 4, 5 :

- (i) $(1, 2, 3)(3, 1, 2, 4) = (1, 4, 3, 2)$
(ii) $(1, 2, 3)(4, 5) = (4, 5)(1, 2, 3)$

4. यदि f समूह G का अन्तर्क्षेपी (आच्छादक) समूह G' का समाकारिता है, तो $f(e) = e'$ जहाँ e और e' क्रमशः G और G' के तत्समक हैं।

If $f : G \rightarrow G'$ is an into homomorphism of groups, then $f(e) = e'$ where e and e' are identities of G and G' respectively.

अथवा

Or

मानलो M सभी 2×2 आव्यूहों, जिनके अवयव पूर्णांक हैं का समुच्चय है, आव्यूहों का योग और गुणन दो वलय संयोजन है, तब M शून्य भाजक सहित एक वलय है।

Suppose M is the ring of all 2×2 matrices, whose elements are integers, the addition and multiplication of matrices being the two ring compositions. Then M is a ring with zero divisors.

5. $(-1)^{1/3}$ के सभी मानों को ज्ञात कीजिए।

Find all values of $(-1)^{1/3}$.

[5]

P. T. O.

Code No. : BS-158

अथवा

Or

यदि $\sin(\theta + i\phi) = \tan \alpha + i \sec \alpha$ सिद्ध कीजिए कि $\cos 2\theta \cosh 2\phi = 3$.

If $\sin(\theta + i\phi) = \tan \alpha + i \sec \alpha$ then show that $\cos 2\theta \cosh 2\phi = 3$.

खण्ड 'स'

Section 'C'

निम्नांकित दीर्घ उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Answer the following long answer type questions.

5×5=25

1. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ के सभी आइगेन मानों और आइगेन

सदिशों को ज्ञात कीजिए।

Find all the eigen values and eigen vectors of the matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

[6]

Code No. : BS-158

अथवा

Or

ज्ञात कीजिए कि λ और μ के किन मानों के लिये युगपत समीकरणों :

$$x + 2y + z = 8$$

$$2x + y + 3z = 13$$

$$3x + 4y - \lambda z = \mu$$

का (i) कोई हल नहीं, (ii) एक अद्वितीय हल (iii) अनन्त हल है।

Find that for what values of λ and μ the simultaneous equations :

$$x + 2y + z = 8$$

$$2x + y + 3z = 13$$

$$3x + 4y - \lambda z = \mu$$

have (i) no solution (ii) a unique solution (iii) an infinite solution.

2. समीकरण $x^3 - 9x^2 - 23x - 15 = 0$ के मूलों को ज्ञात कीजिए, जबकि मूल समान्तर श्रेणी में हैं।

Find the roots of the equation $x^3 - 9x^2 - 23x - 15 = 0$ if they are in A.P.

Code No. : BS-158

अथवा

Or

देकार्ते विधि द्वारा निम्न समीकरण को हल कीजिए :

$$x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$$

Solve the following equation by Descartes method :

$$x^4 - 3x^2 - 42x - 40 = 0$$

3. यदि Q^+ सभी धन परिमेय संख्याओं का समुच्चय है और Q^+ में \times द्विआधारी संरचना हो जो निम्न से परिभाषित है।

$$a \times b = \frac{ab}{3}, a, b \in Q^+ \text{ दिखाइये कि } (Q^+, \times) \text{ एक समूह है,}$$

समूह का तत्समक ज्ञात कीजिए।

If Q^+ be the set of all + ve rational numbers and \times be a binary composition in Q^+ defined by

$$a \times b = \frac{ab}{3}, a, b \in Q^+, \text{ show that } (Q^+, \times) \text{ is a group.}$$

Find the identify of the group.

अथवा

Or

गुणात्मक समूह $G\{1, -1, i, -i\}$ से तुल्यकारी नियमित क्रमचय समूह ज्ञात कीजिए।

Find the regular permutation group isomorphic to the multiplicative group $G = \{1, -1, i, -i\}$.

Code No. : BS-158

4. यदि $f: G \rightarrow G'$ समूह समकारिता है, तो f का कर्नेल K समूह G का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

If f is a homomorphism of a group G into a group G' then prove that kernel K of f is a normal subgroup of G .

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि योज्य एवं गुणन संक्रिया के सापेक्ष सभी पूर्णाकों I का समुच्चय एक वलय होता है।

Prove that the set of all integers I is a ring with the compositions of addition and multiplication.

5. सिद्ध कीजिए कि :

$$\tanh^{-1} x = \sinh^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Prove that :

$$\tanh^{-1} x = \sinh^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Code No. : BS-158

अथवा

Or

दर्शाइये कि :

$$i \log \frac{x-i}{x+i} = \pi - 2 \tan^{-1} x$$

Show that :

$$i \log \frac{x-i}{x+i} = \pi - 2 \tan^{-1} x$$

□ □ □ □ □ d □ □ □ □ □