

Roll No.

Total No. of Sections : 3

Total No. of Printed Pages : 10

Code No. : BS-160

Online Annual Examination, 2022

B.Sc. Part I

MATHEMATICS

Paper III

[Vector Analysis and Geometry]

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 50

नोट : खण्ड 'अ' अति लघु उत्तरीय प्रकार का, जिसमें दस प्रश्न हैं, अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघु उत्तरीय प्रकार के प्रश्न हैं एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल किया जाना है।

Note : Section 'A', containing 10 very short answer type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short answer type questions and Section 'C' consists of long answer type questions. Section 'A' has to be solved first.

खण्ड 'अ'

Section 'A'

निम्नांकित अति लघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्यों में दीजिए।

Code No. : BS-160

Answer the following very short answer type questions in one or two sentences. **1×10=10**

1. तीन सदिशों के समतलीय होने का क्या प्रतिबन्ध है?

What is the condition for three vectors to be coplanar?

2. संकारक ∇ को परिभाषित कीजिए।

Define the operator ∇ .

3. निश्चित समाकलन का सूत्र लिखिए।

Write formula for definite integral.

4. स्टोक प्रमेय को लिखिए।

Write Stoke's theorem.

5. शांकव के समीकरण को दीर्घवृत्त प्रदर्शित करने का प्रतिबन्ध दीजिए।

Write the condition that general equation of conic represents an ellipse.

6. ध्रुव पर नाभि एवं प्रारम्भिक रेखा से r कोण बनाने वाले अक्ष के शांकव का ध्रुवीय समीकरण लिखिए।

Write the polar equation of a conic with its focus as the pole and its axis inclined at an angle r to the initial line.

Code No. : BS-160

7. समीकरण $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ के शून्य गोला प्रदर्शित करने का प्रतिबन्ध लिखिए।

Write the condition when $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ represents a point sphere.

8. शंकु $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ के तीन परस्पर लाम्बिक स्पर्श तल होने का प्रतिबन्ध लिखिए।

Write the condition that $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ have three mutually perpendicular tangent planes.

9. द्विपृष्ठीय अतिपरवलयज का समीकरण लिखिए।

Write the equation of hyperboloid of two sheets.

10. विकासयोग्य सतह को परिभाषित कीजिए।

Define developable surface.

खण्ड 'ब'

Section 'B'

निम्नांकित प्रश्नों को हल कीजिए।

Solve the following questions. **3 × 5 = 15**

1. यदि \hat{r} सदिश \vec{r} की दिशा में एकांक सदिश हो, तो दर्शाइये कि $\hat{r} \times d\hat{r} = \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{r^2}$

Code No. : BS-160

If \hat{r} be the unit vector in the direction of \vec{r} , show

that $\hat{r} \times d\hat{r} = \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{r^2}$.

अथवा

Or

यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, तब दर्शाइये कि :

$$\text{grad } r^n = nr^{n-2} \vec{r}$$

If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, then show that :

$$\text{grad } r^n = nr^{n-2} \vec{r}$$

2. यदि $\vec{a}(t) = ti - t^2j + (t-1)k$ और $\vec{b}(t) = 2t^2i + 6tk$

तब दर्शाइए कि $\int_0^1 \vec{a} \times \vec{b} dt = -\frac{3}{2}i - \frac{13}{6}j + \frac{2}{5}k$

If $\vec{a}(t) = ti - t^2j + (t-1)k$ and $\vec{b}(t) = 2t^2i + 6tk$

then show that $\int_0^1 \vec{a} \times \vec{b} dt = -\frac{3}{2}i - \frac{13}{6}j + \frac{2}{5}k$

अथवा

Or

यदि गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ का पृष्ठ S हो तब गॉस के डाइवर्जेंस प्रमेय से सिद्ध कीजिए कि $\iint_S \vec{r} \cdot \hat{n} dS = 108\pi$.

Code No. : BS-160

If S is the surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, then by Gauss divergence theorem prove that

$$\iint_S \vec{r} \cdot \hat{n} \, dS = 108\pi.$$

3. उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो शांकव $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ को उस बिन्दु पर स्पर्श करता है जहाँ रेखा $x + y + 1 = 0$ उसे काटती है।

Find the equation to the parabola which touches the conic $x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ at the point where it cut by the line $x + y + 1 = 0$.

अथवा

Or

दर्शाइये कि समीकरण $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ एवं $\frac{l}{r} = -1 + a \cos \theta$ एक की शांकव को प्रदर्शित करते हैं।

Show that the equations $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ and $\frac{l}{r} = -1 + e \cos \theta$ represents the same conic.

4. शीर्ष $(0, 0, 3)$ एवं आधार $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ रखने वाले शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the cone whose vertex is $(0, 0, 3)$ and base is the circle $x^2 + y^2 = 4, z = 0$.

Code No. : BS-160

अथवा

Or

उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो वक्र $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, lx + my + nz = p$ को काटता है और जिसके जनक x -अक्ष के समानान्तर हैं।

Find the equation of the cylinder which intersects the curve $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, lx + my + nz = p$ and whose generators are parallel to x -axis.

5. दर्शाइये कि समतल $x + 2y - 2z = 4$ परवलयज $3x^2 + 4y^2 = 24z$ को स्पर्श करता है। स्पर्श बिन्दु भी ज्ञात कीजिए।

Show that the plane $x + 2y - 2z = 4$ touches the paraboloid $3x^2 + 4y^2 = 24z$. Find the point of contact.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ को समतल $lx + my + nz = 0$ द्वारा काटने पर अक्ष शंकु $(b - c) \frac{l}{x} +$

$(c - a) \frac{m}{y} + (a - b) \frac{n}{z} = 0$ पर स्थित होगा।

Prove that the axes of the section of the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ by the plane $lx + my + nz = 0$ by the plane $lx + my + nz = 0$ lie on the cone

$$(b - c) \frac{l}{x} + (c - a) \frac{m}{y} + (a - b) \frac{n}{z} = 0.$$

Code No. : BS-160

खण्ड 'स'

Section 'C'

निम्नांकित प्रश्नों को हल कीजिए।

Solve the following questions. $5 \times 5 = 25$

1. यदि $\vec{r} = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + at \tan \alpha \vec{k}$ हो तो मान ज्ञात कीजिए :

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right]$$

If $\vec{r} = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + at \tan \alpha \vec{k}$, then find the following :

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right]$$

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए :

$$\operatorname{div} r^n \vec{r} = (n+3) r^n$$

Prove that :

$$\operatorname{div} r^n \vec{r} = (n+3) r^n$$

[7]

P. T. O.

Code No. : BS-160

2. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ का मान निकालिये जहाँ $\vec{F} = x^2y^2\vec{i} + y\vec{j}$ और C, xy समतल में $y^2 = 4x$ के अनुदिश बिन्दु (0, 0) से (4, 4) है।

Evaluate $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, where $\vec{F} = x^2y^2\vec{i} + y\vec{j}$ and the curve C is $y^2 = 4x$ in the xy-plane from (0, 0) to (4, 4).

अथवा

Or

गॉस के प्रमेय का सत्यापन कीजिए एवं सिद्ध कीजिए कि :

$$\iint_S [(x^3 - yz)\vec{i} - 2x^2y\vec{j} + 2z\vec{k}] \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{3} a^5$$

जहाँ S समतलों $x = a, x = 0, y = a, y = 0$ और $z = a, z = 0$ से परिबद्ध घन का पृष्ठ है।

Verify Gauss's theorem and show that :

$$\iint_S [(x^3 - yz)\vec{i} - 2x^2y\vec{j} + 2z\vec{k}] \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{3} a^5$$

where S denotes the surface of the cube bounded by the planes $x = 0, x = a, y = 0, y = a, z = 0, z = a$.

3. शांकव $14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$ का अनुरेखण कीजिए।

Trace the conic $14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$.

[8]

Code No. : BS-160

अथवा

Or

किसी शांकव में दो परस्पर लम्ब नाभिगत जीवाओं के व्युत्क्रम का योग अचर होता है, सिद्ध कीजिए।

In a conic prove that the sum of the reciprocals of two perpendicular focal chords is constant.

4. सिद्ध कीजिए कि समीकरण $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ एक शंकु को प्रदर्शित करेगा, यदि $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$.

Prove that the equation $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ represents a cone if $\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} = d$.

अथवा

Or

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका नियामक वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - y + z = 3$ है।

Find the equation of right circular cylinder whose guiding circle is $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - y + z = 3$.

5. समीकरण $3x^2 + 7y^2 + 3z^2 + 10yz - 2zx + 10xy + 4x - 12y - 4z + 1 = 0$ का प्रामाणिक रूप में समानयन कीजिए एवं शांकवज की प्रकृति बताइए।

[9]

P. T. O.

Code No. : BS-160

Reduce the equation $3x^2 + 7y^2 + 3z^2 + 10yz - 2zx + 10xy + 4x - 12y - 4z + 1 = 0$ in the standard form and state the nature of the conicoid.

अथवा

Or

अतिपरवलयज $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ के उन जनक रेखाओं का समीकरण बताइए, जो बिन्दु $(1, 2, -3)$ से जाते हैं।

Find the equation of generating lines of the hyperboloid $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ which pass through the point $(1, 2, -3)$.

□ □ □ □ □ d □ □ □ □ □

[10]

10/700