

Roll No. Total No. of Printed Pages : 9

Code No. : BS-258

Online Annual Examination, 2022

B.Sc. Part II
MATHEMATICS
Paper I
[Advanced Calculus]

Time : Three Hours] [Maximum Marks : 50

नोट : खण्ड 'अ' अति लघु उत्तरीय प्रकार का, जिसमें दस प्रश्न हैं, अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघु उत्तरीय प्रकार के प्रश्न हैं एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल किया जाना है।

Note : Section 'A', containing 10 very short answer type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short answer type questions and Section 'C' consists of long answer type questions. Section 'A' has to be solved first.

खण्ड 'अ'

Section 'A'

निम्नांकित अति लघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्य में दीजिए।

Answer the following very short answer type questions in one or two sentences. $1 \times 10 = 10$

P. T. O.

1. $\int_0^1 \int_0^2 (x+y) dx dy = ?$

2. $B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = ?$

3. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan \theta} = ?$

4. अन्वालोप को परिभाषित कीजिए।

Define Envelope.

5. सजातीय फलन के लिए द्वितीय कोटि के ऑयलर प्रमेय को लिखिए।

Write down second degree Euler's theorem for homogeneous functions.

6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = ?$

7. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} y \sin \frac{1}{x} = ?$

8. मोस्टेस्ट प्रमेय का कथन लिखिए।

State Mostest theorem.

9. $\sum \frac{1}{n^0}$ की अभिसारिता बताइये।Find convergency of $\sum \frac{1}{n^0}$.

Code No. : BS-258

10. क्या $\sum \frac{2n-7}{3n+2}$ एकदिष्ट वर्द्धमान है।

Is $\sum \frac{2n-7}{3n+2}$ monotonic increasing.

खण्ड 'ब'

Section 'B'

निम्नांकित लघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर 150-200 शब्द सीमा में दीजिए।

Answer the following short answer type questions with word limit 150-200. $3 \times 5 = 15$

1. क्या किसी अभिसारी अनुक्रम की सीमा अद्वितीय होती है ? दिखाइये।

Is limit of any convergent sequence is unique ? Show.

अथवा

Or

क्या प्रत्येक कोशी अनुक्रम परिबद्ध होता है ?

Is every Cauchy sequence is bounded ?

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{जब } x \neq 0 \\ 1 & \text{जब } x = 0 \end{cases}$

$x = 0$ पर सततता की जाँच कीजिए।

[3]

P. T. O.

Code No. : BS-258

$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{when } x \neq 0 \\ 1 & \text{when } x = 0 \end{cases}$

Test continuity at $x = 0$.

अथवा

Or

$x = 0$ पर सततता की जाँच कीजिए—

$f(x) = \frac{1}{1-e^{1/x}}$

Test continuity at $x = 0$:

$f(x) = \frac{1}{1-e^{1/x}}$

3. $f(x) = 8x - x^2$ के लिए $[0, 8]$ में रोले के प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

Verify Rolle's theorem for $f(x) = 8x - x^2$ in $[0, 8]$.

अथवा

Or

क्या $\lim_{(k,y) \rightarrow (0,0)} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ का अस्तित्व है ?

Is $\lim_{(k,y) \rightarrow (0,0)} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ exists.

[4]

Code No. : BS-258

4. $(x - \alpha)^2 + y^2 = 4\alpha$ के अन्वालोप का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation at envelope of $(x - \alpha)^2 + y^2 = 4\alpha$.

अथवा

Or

$f(x, y) = xy(a - x - y)$ के उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ मानों को ज्ञात कीजिए।

Find the maximum and minimum values of $f(x, y) = xy(a - x - y)$.

5. दिखाइये— $\int_0^1 \left(\log \frac{1}{y}\right)^{n-1} dy$

Show that : $\int_0^1 \left(\log \frac{1}{y}\right)^{n-1} dy$

अथवा

Or

$$\iiint x^{-1/2} y^{-1/2} z^{-1/2} (1-x-y-z)^{1/2} dx dy dz = ?$$

$x, y, z > 0$ तथा $x + y + z < 1$.

$$\iiint x^{-1/2} y^{-1/2} z^{-1/2} (1-x-y-z)^{1/2} dx dy dz = ?$$

$x, y, z > 0$ and $x + y + z < 1$.

[5]

P. T. O.

Code No. : BS-258

खण्ड 'स'

Section 'C'

निम्नांकित लघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर 300-350 शब्द सीमा में दीजिए।

Answer the following short answer type questions with word limit 300-350. $5 \times 5 = 25$

1. यदि $y_1 = \cos x_1, y_2 = \sin x_1 \cos x_2, y_3 = \sin x_1 \sin x_2 \cos x_3 \dots \dots y_n = \sin x_1 \sin x_2 \dots \dots \sin x_{n-1} \cdot \cos x_n$ तो दिखाइये कि

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = (-1)^n$$

If $y_1 = \cos x_1, y_2 = \sin x_1 \cos x_2, y_3 = \sin x_1 \sin x_2 \cos x_3 \dots \dots y_n = \sin x_1 \sin x_2 \dots \dots \sin x_{n-1} \cdot \cos x_n$.

Then show that

$$\frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = (-1)^n$$

अथवा

Or

दिखाइये कि चक्रज का केन्द्रक एक अन्य चक्रज होता है।

Show that evolute of a cycloid is another cycloid.

[6]

Code No. : BS-258

2. मूल बिन्दु से अतिपरवलय $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225, z = 0$ की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find minimum distance of origin from the hyperbola $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225, z = 0$.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए $\int_0^2 x(8-x^3)^{1/3} dx = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$.

Prove that $\int_0^2 x(8-x^3)^{1/3} dx = \frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$.

3. $\iint_R y dx dy$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ R वक्रों $y^2 = 4x$ और $x^2 = 4y$ के बीच है।

Find $\iint_R y dx dy$ where R is in between $y^2 = 4x, x^2 = 4y$.

अथवा

Or

समाकलन का क्रम बदलिए $\int_0^{2a} \int_{x^2/4a}^{3a-x} f(x, y) dx dy$.

Change order of integration $\int_0^{2a} \int_{x^2/4a}^{3a-x} f(x, y) dx dy$.

[7]

P. T. O.

Code No. : BS-258

4. एक समान संतत को परिभाषित कीजिए तथा $f(x) = \sqrt{x}$ के लिए अंतराल $[0, 1]$ में एकसमान सततता की जाँच कीजिए।

Define uniform continuous and test uniform convergency of $f(x) = \sqrt{x}$ in the interval $[0, 1]$.

अथवा

Or

$x = 0$ पर निम्नलिखित फलन की सततता और अवकलनीयता की जाँच कीजिए—

$$\phi(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

Test continuity and differentiability of following function at $x = 0$

$$\phi(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

5. निम्नलिखित श्रेणी की निरपेक्ष अभिसारिता की जाँच कीजिए—

$$(\sqrt{1^2+1}-1) - (\sqrt{2^2+1}-2) + (\sqrt{3^2+1}-3) \\ - (\sqrt{4^2+1}-4) + \dots$$

Test the absolute convergency of following series :

$$(\sqrt{1^2+1}-1) - (\sqrt{2^2+1}-2) + (\sqrt{3^2+1}-3) \\ - (\sqrt{4^2+1}-4) + \dots$$

[8]

Code No. : BS-258

अथवा

Or

निम्नलिखित श्रेणी की अभिसारिता की जाँच कीजिए—

Test the convergency of following series :

$$x + \frac{2^2 x^2}{|2|} + \frac{3^3 x^3}{|3|} + \frac{4^4 x^4}{|4|} + \dots x > 0.$$

□ □ □ □ □ d □ □ □ □ □