

Code No. : BS-259

Roll No. Total No. of Printed Pages : 10

Code No. : BS-259

Online Annual Examination, 2022

B.Sc. Part II
MATHEMATICS
Paper II

[Differential Equation]

Time : Three Hours] [Maximum Marks : 50

नोट : खण्ड 'अ' अति लघु उत्तरीय प्रकार का, जिसमें दस प्रश्न हैं, अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघु उत्तरीय प्रकार के प्रश्न हैं एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल किया जाना है।

Note : Section 'A', containing 10 very short answer type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short answer type questions and Section 'C' consists of long answer type questions. Section 'A' has to be solved first.

खण्ड 'अ'

Section 'A'

निम्नांकित अति लघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर एक या दो वाक्यों में दीजिए।

Answer the following very short answer type questions in one or two sentences. $1 \times 10 = 10$

P. T. O.

1. प्रथम स्थानान्तरण प्रमेय का कथन लिखिये।

Write statement of first translation theorem.

2. प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण की परिभाषा लिखिए।

Write definition of Inverse Laplace Transform.

3. अवकल समीकरण $z = px + qy + pq$ का पूर्ण समाकल लिखिये।।

Write complete integral of differential equation $z = px + qy + pq$.

4. लैग्रांज रैखिक समीकरण की परिभाषा लिखिए।

Write definition of Lagrange's Linear equation.

5. आंशिक अवकल समीकरण $r + a^2t = 0$ की कोटि लिखिए।

Write order of partial differential equation $r + a^2t = 0$.

6. द्वितीय कोटि के आंशिक अवकल समीकरण की परिभाषा लिखिये।

Write definition of partial differential equation of second order.

7. घात श्रेणी की परिभाषा लिखिये।

Write definition of power series.

[2]

Code No. : BS-259

8. n -कोटि के बेसल अवकल समीकरण को लिखिये।

Write Bessel's differential equation of order- n .

9. फलनक की सातत्य की परिभाषा लिखिये।

Write definition of continuity of a functional.

10. उचित क्षेत्र से आप क्या समझते हैं ?

What do you mean by proper field.

खण्ड 'ब'

Section 'B'

निम्नांकित लघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर 150-200 शब्द सीमा में दीजिए।

Answer the following short answer type questions with word limit 150-200. $3 \times 5 = 15$

1. हल कीजिए : $L\{e^+ \sin^2 t\}$

Solve : $L\{e^+ \sin^2 t\}$

अथवा

Or

हल कीजिए :

$$L^{-1} \left\{ \frac{p+1}{p^2+6p+25} \right\}$$

[3]

P. T. O.

Code No. : BS-259

Solve :

$$L^{-1} \left\{ \frac{p+1}{p^2+6p+25} \right\}$$

2. हल कीजिये—

$$xzp + yzq = xy$$

Solve :

$$xzp + yzq = xy$$

अथवा

Or

पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिये—

$$z(p^2 - q^2) = x - y$$

Find complete integral :

$$z(p^2 - q^2) = x - y$$

3. हल कीजिए :

$$(D^2 - 2DD' + D'^2)z = 12xy$$

Solve :

$$(D^2 - 2DD' + D'^2)z = 12xy$$

[4]

Code No. : BS-259

अथवा

Or

हल कीजिए :

$$(2D^2 - 5DD' + 2D'^2)z = 24(y - x)$$

Solve :

$$(2D^2 - 5DD' + 2D'^2)z = 24(y - x)$$

4. घात श्रेणी विधि से हल कीजिये—

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

Solve by power series method :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

अथवा

Or

सिद्ध कीजिये कि—

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

Prove that :

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)$$

5. मान लो एक फलनक $I[y(x)]$ वर्ग $C'[0, 1]$ पर निम्नांकित रूप से परिभाषित है—

$$I[y(x)] = \int_0^1 \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

[5]

P. T. O.

Code No. : BS-259

सिद्ध कीजिये कि, $I[1] = 1$, $I[x] = \sqrt{2}$

$$\text{तथा } I[x^2] = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1} 2$$

Let a functional $I[y(x)]$ defined on the class $C'[0, 1]$ be given by

$$I[y(x)] = \int_0^1 \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

Prove that : $I[1] = 1$, $I[x] = \sqrt{2}$ and

$$I[x^2] = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \sinh^{-1} 2$$

अथवा

Or

निम्न फलनक के चरम का परीक्षण कीजिये—

$$I[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + y' + 1) dx,$$

$$y(0) = 1, y(1) = 2$$

Test the extremal of the following functional :

$$I[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 + y' + 1) dx,$$

$$y(0) = 1, y(1) = 2$$

[6]

Code No. : BS-259

खण्ड 'स'

Section 'C'

निम्नांकित दीर्घ उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर 300-350 शब्द सीमा में दीजिए।

Answer the following long answer type questions with word limit 300-350. $5 \times 5 = 25$

1. हल कीजिए : $(D^2 + 9)y = \cos 2t$, यदि $y(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Solve : $(D^2 + 9)y = \cos 2t$, If $y(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

अथवा

Or

दर्शाइए कि $\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Show that $\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2. चारपिट विधि से हल कीजिए :

$$(p^2 + q^2)y = qz$$

Solve by charpit's method :

$$(p^2 + q^2)y = qz$$

[7]

P. T. O.

Code No. : BS-259

अथवा

Or

हल कीजिए :

$$p + q = x + y + z$$

Solve :

$$p + q = x + y + z$$

3. निम्नलिखित समीकरण का वर्गीकरण कर हल कीजिये—

$$y^2r - 2xys + x^2t - \frac{y^2}{x}p - \frac{x^2}{y}q = 0$$

Classify the following equation and solve it :

$$y^2r - 2xys + x^2t - \frac{y^2}{x}p - \frac{x^2}{y}q = 0$$

अथवा

Or

मोन्जे विधि से हल कीजिये—

$$r = a^2t$$

Solve by monge's method :

$$r = a^2t$$

[8]

Code No. : BS-259

4. सिद्ध कीजिये कि—

(अ) $p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) = (2n+1)p_n(x)$

(ब) $xp'_n - p'_{n+1} = -(n+1)p_n$

Prove that :

(a) $p'_{n+1}(x) - p'_{n-1}(x) = (2n+1)p_n(x)$

(b) $xp'_n - p'_{n+1} = -(n+1)p_n$

अथवा

Or

स्टर्म-ल्यूविल समस्या $\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, y(0) = 0, y(z) = 0$

के आइगेन मानों और आइगेन फलनों को प्राप्त कीजिये।

Obtain the eigen values and eigen functions of the

sturm Liouville problem $\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0, y(0) = 0, y(z)$

$= 0.$

5. फलनक $I[y, z] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 + 2yz)dt$ के चरम को

निम्नलिखित परिसीमा प्रतिबंधों $y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, z(0)$

$= -1,$ तथा $z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ के अन्तर्गत ज्ञात कीजिये।

Code No. : BS-259

Find the extremals of the functional

$$I[y, z] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 + 2yz)dt$$

Subject to the boundary conditions

$$y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, z(0) = -1 \text{ and } z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

अथवा

Or

फलनक $I[y(x)] = \int_a^b (x^2y'^2 + 2y^2 + 2xy)dx$ के चरम मान ज्ञात कीजिये।

Find the extremal of the functional :

$$I[y(x)] = \int_a^b (x^2y'^2 + 2y^2 + 2xy)dx$$

□ □ □ □ □ d □ □ □ □ □