Roll No. .... **Total No. of Printed Pages : 8**

Code No. : BS-359

Online Annual Examination, 2022

B.Sc. Part III

MATHEMATICS

Paper II

[Abstract Algebra]

Time : Three Hours] [Maximum Marks : 50

नोट : *खण्ड 'अ' अति लघु उत्तरीय प्रकार का, जिसमें दस प्रश्न हैं, अनिवार्य है। खण्ड 'ब' में लघु उत्तरीय प्रकार के प्रश्न हैं एवं खण्ड 'स' में दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं। खण्ड 'अ' को सबसे पहले हल किया जाना है।*

Note : *Section 'A', containing 10 very short answer type questions, is compulsory. Section 'B' consists of short answer type questions and Section 'C' consists of long answer type questions. Section 'A' has to be solved first.*

खण्ड 'अ'

Section 'A'

निम्न अति लघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

Answer the following very short type questions :

1 × 10 = 10

1. संयुग्मी संबंध की परिभाषा लिखिए।

Define conjugacy relation.

2. प्रसामान्यक को परिभाषित कीजिए।

Define Normalizer.

3. प्रमुख गुणजावली क्या है ?

What is principal Ideal ?

4. उपप्रतिरूपक की परिभाषा लिखिए।

Write the definition of submodule.

5. रैखिक विस्तृति क्या है ?

What is linear span ?

6. सदिश समष्टि के लिए आधार क्या है ?

What is basis of vector space ?

7. सदिश समष्टि के लिए तुल्याकारिता प्रमेय लिखिए।

Write Isomorphic theorem for vector space.

8. द्वितीय द्विक समष्टि क्या है ?

What is second dual space ?

9. द्विरेखीक रूप की परिभाषा लिखिए।

Write Definition of Bilinear form.

10. त्रिभुज असमिका लिखिए।

Write Triangle Inequality.

खण्ड 'ब'

Section 'B'

निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Write answer of the following questions. **3 × 5 = 15**

1. मान लो G एक अनआबेली समूह है। दर्शाइये कि फलन $f : G \to G$, जो कि $f(x) = x^{-1}\ \forall\ x \in G$ के रूप में है। स्वकारिता नहीं है।

Let G be a non-abelian group. Show that the mapping $f : G \to G$ given by $f(x) = x^{-1}\ \forall\ x \in G$ is not an automorphism.

अथवा

Or

दर्शाइये कि कोटि 30 का कोई समूह नहीं है जो कि सरल है।

Show that no group of order 30 which is simple.

2. दर्शाइये कि बहुपद $f(x)$ को $(x - a)$ से विभाजित किया जाय तो शेषफल $f(a)$ प्राप्त होता है।

Show that if the polynomial $f(x)$ is divided by $(x - a)$ the remainder is $f(a)$.

अथवा

Or

R माड्यूल M के दो उपमाड्यूल का सर्वनिष्ठ भी M एक उपमाड्यूल होता है।

Code No. : BS-359

The intersection of 2 submodules of an R module M is also a submodule of M.

3. दर्शाइये कि सदिश $\{(2, 3, -1), (-1, 4, -2), (1, 18, -4)\}$ $V_3(R)$ के अंतर्गत रैखिकत: स्वतंत्र है।

Show that vector $\{(2, 3, -1), (-1, 4, -2), (1, 18, -4)\}$ is linearly independent under $V_3(R)$.

अथवा

Or

सदिश $\alpha = (3, 1, -4)$ के लिए निर्देशांक का निर्धारण कीजिए जब आधार $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ है।

Find the co-ordinate of vector $\alpha = (3, 1, -4)$ relative to Basis $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

4. निम्न रूप को प्रसामान्यक रूप में बदलिए—

$$q = A(x, x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$$

Reduce the quadratic form

$$q = A(x, x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$$

into canonical form.

अथवा

Or

$T : V_3 \to V_1$ जो कि निम्न प्रकार से परिभाषित है

$$T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

दर्शाइये कि T रैखीक रूपांतरण नहीं है।

Define $T : V_3 \rightarrow V_1$ by the rule

$$T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Show that T is not a linear transformation.

5. यदि $\alpha = (2, 4, 4)$, जहाँ $\alpha \in V_3(R)$ आंतर गुणन है, इकाई सदिश α ज्ञात कीजिए।

If $\alpha = (2, 4, 4)$, where $\alpha \in V_3(R)$ is inner product, find unit vector of α.

अथवा

Or

यदि α, β आंतर गुणन समष्टि V के अवयव हैं तो दिखाइये कि $\| \alpha + \beta \| \leq \| \alpha \| + \| \beta \|$.

If α, β are vectors of inner product space V, then show that $\| \alpha + \beta \| \leq \| \alpha \| + \| \beta \|$.

खण्ड 'स'

Section 'C'

निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Attempt the following questions. **$5 \times 5 = 25$**

1. माना G एक समूह है f, G का एक स्वकारिता है, N, G का एक प्रसामान्य उपसमूह है। सिद्ध कीजिए कि $f(N)$ G का एक प्रसामान्य उपसमूह है।

Code No. : BS-359

Let G be a group. f an automorphism of G, N a normal subgroup of G, prove that $f(N)$ is a normal subgroup of G.

अथवा

Or

मान लो G कोटि 231 का एक समूह है। दर्शाइये कि G के 11 सिलो उपसमूह G के केन्द्र में अंतर्विष्ट है।

Let G be a group of order 231. Show that 11 Sylow subgroup of G is obtained in the centre of G.

2. वलयों के समाकरिता का मूलभूत प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove fundamental theorem on homomorphism of rings.

अथवा

Or

माना N एक R module M का एक उपमाड्यूल है। मान लो $f : M \rightarrow M/N$. एक फलन इस प्रकार है कि $f(x) = x + N \ \forall \ x \in M$ तब f, M आच्छादक M/N एक R समाकारिता है तथा $\ker f = N$.

Let N be a submodule of an R module M let $f : M \rightarrow M/N$ be a mapping defined as $f(x) = x + N \ \forall \ x \in M$. Then f is an R-homomorphism of M into M/N and $\ker f = N$.

3. K के किस मान के लिए सदिश $(1, k, 5) \in V_3(R)$ सदिशों $(1, -3, 2)$ तथा $(2, -1, 1)$ का एकघात संचय है।

For what value of k, vector $(1, k, 5) \in V_3(R)$ is a linear combination of vectors $(1, -3, 2)$, $(2, -1, 1)$.

अथवा

Or

किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि के लिए विस्तार प्रमेय लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove extension theorem for finite dimensional vector space.

4. दर्शाइये कि दो रैखिक रूपांतरण का गुणनफल एक रैखिक रूपांतरण होता है।

Show that the product of two linear transformation is also a linear transformation.

अथवा

Or

दर्शाइये कि निम्न आव्यूह अभिकर्णीय है।

Show that the following matrix is not diagonalizable.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Code No. : BS-359

5. कॉशी स्वार्ज असमिका लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।

State and prove Cauchy-Schwarz Inequality.

अथवा

Or

यदि $V(F)$ एक अंतर गुणन समष्टि है तथा S, $V(F)$ का एक उपसमुच्चय है तब दर्शाइये कि

(i) $S^{\perp} = [L(S)]^{\perp}$ (ii) $L(S) = \subseteq S^{\perp\perp}$

If $V(F)$ be an inner product space and S be a subset of $V(F)$ then show that :

(i) $S^{\perp} = [L(S)]^{\perp}$ (ii) $L(S) = \subseteq S^{\perp\perp}$

❒ ❒ ❒ ❒ ❒ d ❒ ❒ ❒ ❒ ❒